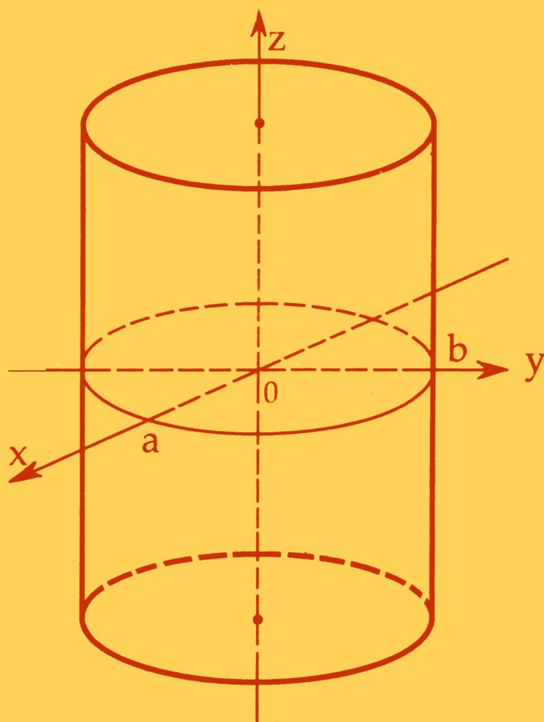
B. Godvaiša
J. Šinkūnas

MATEMATIKA

2



B. Godvaiša
J. Šinkūnas

MATEMATIKA

②

ŽIBURIO
leidykla
Vilnius 1996

UDK 51(075.32)
Ma 615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos
patvirtinta 1995 11 09, Nr. 25

Leidinį recenzavo
mat. m. dr. **E. NENIŠKYTĖ** ir **A. SKŪPAS**

Ma615 **Godvaiša B., Šinkūnas J.**
Matematika.— V.: Žiburio l-kla, 1992—1996.
D. 2: Vadovėlis aukštesn. m-klų moksleiviams / B. Godvaiša, J. Šinkūnas.— 432 p.: brėž.— ISBN 9986-524-07-5.

Vadovėlio antrojoje dalyje išdėstytos pagrindinės vieno ir kelių kintamųjų funkcijų diferencialinio ir integralinio skaičiavimo sąvokos bei metodai, diferencialinių lygčių teorijos bei tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys. Knyga skirta aukštesniųjų mokyklų moksleiviams.

UDK 51(075.32)

Mokymo leidinys. Boleslovas **Godvaiša,** Juozas **Šinkūnas.** MATEMATIKA. D. 2. Redaktorė E. Leikauskienė. Viršelio dailininkas V. Kudaba. Techninė redaktorė R. Bancevičienė.

SL 1744. 1996 10 18. 27,03 apsk. leid. l. Tiražas 5000 egz. Užsakymas 284. „Žiburio“ leidykla, Architektų 158—5, 2049 Vilnius. Spausdino „Aušros“ spaustuvė, Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas.

ISBN 9986-524-07-5

PRATARMĖ

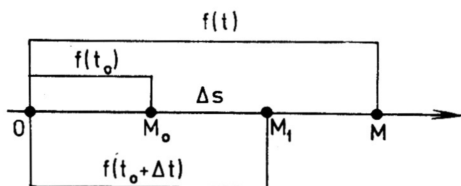
Antroji „Matematikos" vadovėlio dalis parašyta pagal dabartinę aukštesniųjų mokyklų matematikos programą. Šioje dalyje išdėstytos pagrindinės vieno ir kelių kintamųjų funkcijų diferencialinio ir integralinio skaičiavimo sąvokos bei metodai, taip pat jų taikymas geometrijoje ir fizikoje, išdėstyti diferencialinių lygčių teorijos bei tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys. 1—5 skyrius parašė B. Godvaiša, o 6—12 — J. Šinkūnas.

Knyga skirta aukštesniųjų mokyklų moksleiviams. Be abejo, ja, kaip mokymo priemone, galės naudotis ir aukštųjų mokyklų studentai bei gimnazijų moksleiviai.

Autoriai nuoširdžiai dėkoja Vilniaus universiteto docentams A. Nagelei, E. Neniškytei ir mokytojui metodininkui A. Skūpui, atidžiai perskaičiusiems rankraštį ir pateikusiems vertingų pastabų, Vilniaus pedagoginio universiteto docentams J. Baniui ir R. Skrabutėnui už 11 ir 12 skyrių pastabas.

1. IŠVESTINĖ

1.1. Judančio taško greitis



1 pav.

Sakykime, materialusis taškas M juda nustatytos krypties tiese (1 pav.). Aišku, kad taško nueitas kelias $OM=s$ yra laiko t funkcija $s=f(t)$. Kai $t=0$, taškas buvo koordinačių pradžioje O. Raskime jo greitį V laiko momentu t_0, kai taškas yra padėtyje M_0. Per laiko tarpą Δt taškas nueis atkarpą $M_0M_1=\Delta s$, kurią apskaičiuojame šitaip:

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

Padaliję Δs iš Δt, gausime vidutinį taško greitį atkarpoje M_0M_1:

$$v_{vid}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Kuo trumpesnis laikotarpis Δt, praėjęs po momento t_0, tuo tiksliau vidutinis greitis apibūdina judantį tašką laiko momentu t_0. Perėję prie ribos, kai $\Delta t\to 0$, gauname lygybę

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0} v_{vid}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Taško judėjimo *greičiu v laiko momentu* t_0 vadiname jo vidutinio greičio ribą, kai laiko pokytis Δt artėja prie nulio.

Pavyzdys. Apskaičiuokime laisvai krintančio kūno greitį v bet kuriuo laiko momentu t, kai kelias išreiškiamas formule

$$s=\frac{gt^2}{2};$$

čia g — laisvai krintančių kūnų pagreitis.

Vietoj t_0 imkime bet kurią t reikšmę ir remkimės (1) formule:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g}{2}(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)-\frac{gt^2}{2}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g}{2}(2t\Delta t+(\Delta t)^2)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g}{2}(2t+\Delta t)=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Taigi

$$v=gt.$$

Nagrinėdami judėjimą, kai kelias išreiškiamas tiesine funkcija $s=vt+s_0$, gauname

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)+s_0-vt-s_0}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta t}{\Delta t}=v=\text{const}.$$

1.2. Srovės stiprumas

Elektros kiekis Q elektros grandinėje yra laiko funkcija, t. y. $Q=f(t)$. Apskaičiuokime srovės stiprumą šioje grandinėje laiko momentu t. Laiko momentu $t+\Delta t$ elektros grandine pratekės elektros kiekis $f(t+\Delta t)$. Vadinasi, per laikotarpį Δt grandine pratekės elektros kiekis

$$Q=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Taigi vidutinis elektros srovės stiprumas yra

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

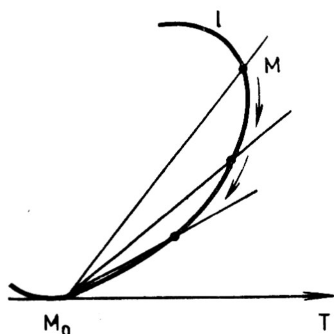
Elektros srovės stiprumu laiko momentu t vadinama riba, prie kurios artėja vidutinis elektros srovės stiprumas, kai $\Delta t\to 0$:

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

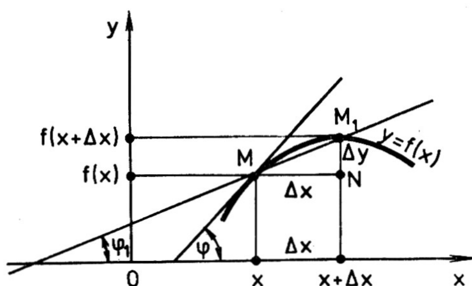
1.3. Liestinės krypties nustatymas kreivės taške

Imkime kokią nors kreivę l ir pasirinkime joje tašką M_0 (2 pav.). Paaiškinsime kreivės l liestinės taške M_0 sąvoką. Tam tikslui imame bet kokį kitą tos kreivės tašką M ir brėžiame kirstinę M_0M. Kai taškas M, judėdamas kreive, artėja prie taško M_0, kirstinė sukasi apie tašką M_0.

Ribinė kirstinės padėtis M_0T, prie kurios artėja kreivės l kirstinė M_0M, kai taškas M kreive artėja prie taško M_0, vadinama tos *kreivės liestine taške* M_0.



2 pav.



3 pav.

Tarkime, kad kreivė yra funkcijos $y=f(x)$ grafikas (3 pav.). Norint nustatyti to grafiko liestinės taške $M(x, y)$ padėtį, reikia žinoti jos krypties koeficientą. Parinkę kreivėje bet kokį tašką M_1 ir sujungę jį su tašku M, gauname kirstinę MM_1, kuri su ašimi Ox sudaro kampą φ_1. Šios kirstinės krypties koeficientas k_1 randamas iš trikampio MM_1N:

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Liestinės MT krypties koeficientas yra

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Pavyzdys. Raskime parabolės $y=\frac{1}{2}x^2$ liestinės krypties koeficientą taške, kurio abscisė lygi 2, t. y. $x=2$.

Taško M abscisei $x=2$ suteikę pokytį Δx, turime

$$\Delta y=\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}((x+\Delta x)^2-x^2)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+\Delta x+x)(x+\Delta x-x)=\frac{1}{2}\Delta x(2x+\Delta x).$$

Skaičiuojame santykį

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}(2x+\Delta x).$$

Liestinės krypties koeficientas yra

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}(2x+\Delta x)=\frac{1}{2}\cdot 2x=x.$$

Sąlygoje $x=2$. Taigi $k=2$.

1.4. Funkcijos išvestinė

1.1—1.3 skyreliuose išnagrinėti pavyzdžiai, kuriuose buvo skaičiuojama: a) funkcijos pokytis, b) funkcijos pokyčio ir argumento pokyčio santykis, c) pastarojo santykio riba. Šiuos skaičiavimus atlikime paėmę bet kokią funkciją $y=f(x)$, tolydžią taške x_0. Šiame taške funkcijos reikšmė lygi $f(x_0)$. Argumentui x_0 suteikę pokytį Δx, apskaičiuojame funkcijos reikšmę taške $x_0+\Delta x$: $f(x_0+\Delta x)$. Argumento pokytį Δx atitinkantis funkcijos pokytis yra

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Santykis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

rodo funkcijos $y=f(x)$ vidutinį kitimo greitį intervale $[x_0, x_0+\Delta x]$. Skaičiuokime gautojo santykio ribą, kai $\Delta x\to 0$. Jei ši riba egzistuoja, tai ji vadinama *funkcijos* $y=f(x)$ *išvestine taške* x_0.

Taigi *funkcijos* $y=f(x)$ *išvestine taške* x_0 *vadinama tos funkcijos pokyčio* $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ *ir jį atitinkančio argumento pokyčio* Δx *santykio riba, kai* $\Delta x\to 0$, t. y.

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

Funkcijos išvestinė taške x_0 yra skaičius, pagal kurį nustatome, koks yra funkcijos kitimo greitis tame taške. Išvestinė, ap-

skaičiuota paėmus bet kurią kintamojo x reikšmę, yra taip pat kintamojo x funkcija, kurią simboliškai žymėsime

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x).$$

Įvedę išvestinės sąvoką, nagrinėtuosius (1.1, 1.2, 1.3) klausimus galime suformuluoti šitaip:

a) taško judėjimo, apibrėžto funkcija $s=f(t)$, greitis bet kuriuo laiko momentu yra nueito kelio išvestinė, t. y.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s';$$

b) srovės stiprumas I bet kuriuo laiko momentu t yra elektros kiekio Q išvestinė, t. y.

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Q';$$

c) funkcijos $y=f(x)$ grafiko — kreivės liestinės krypties koeficientas lygus tos funkcijos išvestinei lietimosi taške x_0, t. y.

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Funkcijos išvestinės skaičiavimo operacija dažnai vadinama *diferencijavimu.* Funkciją, turinčią išvestinę taške x_0, toliau vadinsime *diferencijuojama taške* x_0.

Teorema. *Jei funkcija* $y=f(x)$ *diferencijuojama taške* x_0, *tai ji yra tolydi tame taške.*

Įrodymas. Kadangi

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tai pagal ribos savybę galime užrašyti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x);$$

čia $\alpha(\Delta x)\to 0$, kai $\Delta x\to 0$. Abi lygybės puses padauginę iš Δx, gauname

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Tai reiškia, kad funkcija $y=f(x)$ taške x_0 yra tolydi.

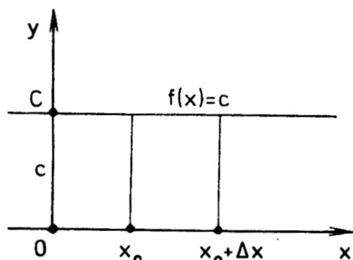
1.5. Funkcijų diferencijavimo taisyklės

1. *Pastoviosios funkcijos išvestinė lygi nuliui.*

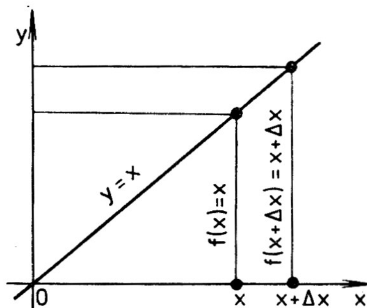
Tarkime, kad $f(x)=c$ (c — const).

Tokios funkcijos grafikas pateiktas 4 paveiksle. Akivaizdu, kad $f(x_0)=f(x_0+\Delta x)=c$. Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu, turime

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$



4 pav.



5 pav.

2. *Funkcijos $f(x)=x$ išvestinė lygi vienetui.*

Turime funkciją $f(x)=x$, kurios grafikas pavaizduotas 5 paveiksle. Pritaikę funkcijos išvestinės apibrėžimą, turime

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1.$$

3. *Funkcijos pastovų daugiklį galima iškelti prieš jos išvestinės ženklą.*

Turime funkciją $F(x)=kf(x)$. Pagal išvestinės apibrėžimą

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{kf(x+\Delta x)-kf(x)}{\Delta x}=$$
$$=k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=kf'(x).$$

4. *Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos taške x, tai jų suma $F(x)=f(x)+g(x)$ taip pat diferencijuojama ir*

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))+(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x).$$

Taigi

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).} \qquad (1)$$

Analogiškai

$$\boxed{(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x).} \qquad (2)$$

Ši taisyklė galioja bet kuriam baigtiniam funkcijų dėmenų skaičiui.

5. *Jeigu funkcijos* $u=f(x)$ *ir* $v=g(x)$ *yra diferencijuojamos bet kuriame taške* x, *tai šių funkcijų sandaugos* $F(x)=uv$ *išvestinė tame taške apskaičiuojama pagal formulę* $(uv)'=u'v+v'u$. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, gauname:

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)+u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=(\lim_{\Delta x\to 0}(u(x+\Delta x))(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+$$

$$+(\lim_{\Delta x\to 0}v(x))(\lim\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x).$$

Taigi

$$F'(x)=u(x)v'(x)+v(x)u'(x),$$

arba

$$\boxed{(uv)'=u'v+v'u.} \qquad (3)$$

Jeigu vienas iš dauginamųjų yra pastovus, tai diferencijuojame šitaip:

$$(cu)'=c'u+cu',$$

arba

$$\boxed{(cu)'=cu'.}$$

Matome, kad pasitvirtino trečioji diferencijavimo taisyklė.

Pavyzdys. Raskime funkcijos $y=(x-2)(x+3)$ išvestinę.

Pritaikę (3) formulę, gauname:

$$y'=(x-2)'(x+3)+(x+3)'(x-2)=$$
$$=1\cdot(x+3)+1\cdot(x-2)=x+3+x-2=2x+1.$$

6. *Jei funkcija* $f(x)=x^n (n\in N)$ *yra diferencijuojama taške* x, *tai*

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \qquad (4)$$

Ši formulė įrodoma matematinės indukcijos metodu.

Funkcijos $f(x)=x$ išvestinė $f'(x)=x'=1$.

Remdamiesi sandaugos išvestinės taisykle, randame

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'\cdot x+x'\cdot x=x+x=2x.$$

Panašiai randame ir

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'x+x'\cdot x^2=2x\cdot x+x^2=2x^2+x^2=3x^2.$$

Analogiškai

$$(x^4)'=4x^3.$$

Tarkime, kad (4) formulė teisinga, kai $n=k$

$$\boxed{(x^k)'=kx^{k-1}, \text{ kai } k\in N.}$$

Įrodysime, kad ši formulė teisinga ir tuo atveju, kai $n=k+1$, $k\in N$, t. y.

$$(x^{k+1})'=(k+1)x^k.$$

Dabar laipsnio x^{k+1} išvestinę randame šitaip:

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot x'=$$
$$=kx^{k-1}\cdot x+x^k=k\cdot x^k+x^k=(k+1)x^k.$$

Taigi formulė $(x^n)'=nx^{n-1}$ galioja ir tuo atveju, kai $n=k+1$, $k\in N$.

Jeigu $n=1$ arba $n=0$, tai su visais $x\neq 0$ ši formulė irgi teisinga. Iš tikrųjų iš (4) formulės

$$(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1,$$
$$(x^0)'=0\cdot x^{0-1}=0.$$

Tai sutampa su funkcijų x ir 1 išvestinių reikšmėmis, jau žinomomis iš pirmosios ir antrosios taisyklių.

Pavyzdys. Rasime išvestinę $y=5(2x^3+1)$:

$$y'=5(2x^3+1)'=5\cdot 2\cdot (x^3)'=10\cdot 3x^2=30x^2.$$

7. *Jei funkcija* $F(x)=\frac{1}{v}$ *diferencijuojama bet kuriame taške* x *ir* $v\neq 0$, *tai*

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'(x)}{v^2}.$$

Iš tikrųjų, remdamiesi išvestinės apibrėžimu, turime

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x(v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=\frac{-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=-\frac{v'(x)}{v^2}.$$

Taigi

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.} \tag{5}$$

Jeigu funkcijos $u=f(x)$ ir $v=\varphi(x)$ diferencijuojamos taške x ir $v\neq 0$, tai

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u\left(\frac{1}{v}\right)'+\frac{1}{v}u'=-\frac{uv'}{v^2}+\frac{u'}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Taigi dalmens išvestinė

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.} \tag{6}$$

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $y=\frac{1}{5x^2}$ išvestinę.

Pritaikę (4) formulę, turime:

$$y'=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{5}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=-\frac{2}{5x^3}.$$

2. $y=\frac{2x^3+3}{4x^2-1}$.

$$y'=\frac{(2x^3+3)'(4x^2-1)-(4x^2-1)'(2x^3+3)}{(4x^2-1)^2}=\frac{6x^2(4x^2-1)-8x(2x^3+3)}{(4x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{24x^4-6x^2-16x^4-24x}{(4x^2-1)^2}=\frac{8x^4-6x^2-24x}{(4x^2-1)^2}=\frac{2x(4x^3-3x-12)}{(4x^2-1)^2}.$$

Įrodysime, kad laipsnio išvestinės formulė $(x^n)'=nx^{n-1}$ teisinga ir tada, kai n yra sveikasis neigiamas skaičius. Diferencijuojame funkciją

$$(x^{-n})'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{0\cdot x^n-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}.$$

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $y=2x^{-3}$ išvestinę.
Pritaikę formulę, gauname

$$y'=2\cdot(-3)x^{-3-1}=-6x^{-4}.$$

2. $y=\frac{2}{3}x^{-3}+\frac{3}{4}x^{-4}+2x^{-1}+1.$

$$y'=\frac{2}{3}(-3)x^{-4}+\frac{3}{4}(-4)x^{-5}+2(-1)x^{-2}=$$
$$=-2x^{-4}-3x^{-5}-2x^{-2}.$$

3. $y=\frac{3x^{-4}+4x^{-6}+8x^{-8}}{4x^{-6}}.$

Prieš pradėdami diferencijuoti šį reiškinį, atliekame veiksmus su laipsniais:

$$y=\frac{3}{4}x^{-4+6}+1+2x^{-2}=\frac{3}{4}x^2+1+2x^{-2};$$
$$y'=\frac{3}{4}\cdot 2x-4x^{-3}=\frac{3}{2}x-4x^{-3}.$$

1.6. Sudėtinė funkcija ir jos išvestinė

Imkime dvi funkcijas $y=f(u)$ ir $u=\varphi(x)$. Jei funkcijos $u=\varphi(x)$, apibrėžtos srityje X, reikšmės priklauso sričiai U, o srityje U apibrėžta funkcija $y=f(u)$, tai kiekvieną x reikšmę x_0 ($x_0\in X$) atitinka u reikšmė $u_0=\varphi(x_0)$, o šią u reikšmę u_0 atitinka y reikšmė $y_0=f(u_0)$.

Atitiktis, kuria kiekvienai x reikšmei x_0 iš srities X priskiriama y reikšmė y_0, vadinama sudėtine funkcija ir žymima

$$y=f(\varphi(x)). \qquad (1)$$

Pavyzdžiui, jei funkcija $u=\sin x$ apibrėžta intervale $X=(0, \pi)$, o funkcija $y=\lg u$ apibrėžta intervale $Z=(0, +\infty)$, tai funkcijos $u=\sin x$ reikšmių aibė yra intervalas $(0, 1)$, t. y. kiekviena $u=\sin x$ reikšmė priklauso funkcijos $y=\lg u$ apibrėžimo sričiai U.

Jei funkcija $u=\sin x$ apibrėžta uždarajame intervale $[0, \pi]$, tai jos reikšmės sudaro intervalą $[0, 1]$, kuris nepriklauso funkcijos $y=\lg u$ apibrėžimo sričiai $U=(0, +\infty)$. Šiuo atveju sudėtinė funkcija neapibrėžta taškuose $x=k\pi$, kai $k\in Z$.

Jeigu funkcija $u=\varphi(x)$ kuriame nors taške x_0 turi išvestinę $u'_x=\varphi'(x_0)$, o funkcija $y=f(u)$ atitinkamame taške $u_0=\varphi(x_0)$ turi

išvestinę $y'_u = f'(u_0)$, tai sudėtinė funkcija $y = f(\varphi(x))$ minėtame taške taip pat turi išvestinę, kuri užrašoma šitaip:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Šį tvirtinimą įrodysime. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, galime užrašyti:

$$(f(\varphi(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Kadangi $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi$, o iš čia $\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \Delta\varphi$, be to, $\Delta\varphi \to 0$, kai $\Delta x \to 0$, tai

$$(f(\varphi(x)))' = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{f(\varphi(x)+\Delta\varphi) - f(\varphi(x))}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Taigi

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x.} \qquad (2)$$

Pavyzdys. Raskime funkcijos $y = (3x^2+2)^3$ išvestinę.

Remdamiesi (2) formule, gauname

$$y' = 3(3x^2+2)^2 \cdot (3x^2+2)' = 3(3x^2+2)^2 \cdot 6x = 18x \cdot (3x^2+2)^2.$$

1.7. Trigonometrinių funkcijų išvestinės

Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

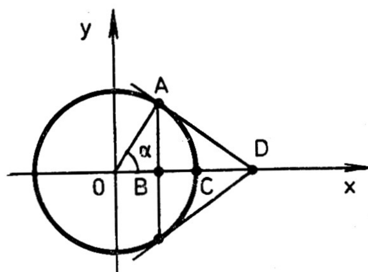
Iš pradžių nagrinėkime funkciją

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Ši funkcija apibrėžta su bet kuriomis argumento x reikšmėmis, išskyrus $x=0$.

Sudarome lentelę imdami santykio $\frac{\sin x}{x}$ reikšmę keturių ženklų po kablelio tikslumu:

x	0,5000	0,1000	0,0500
$\frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996



6 pav.

Matome, kad kai argumento x reikšmės, būdamos teigiamos, mažėja ($x \to 0$), funkcija artėja į vienetą. Šį faktą galime pagrįsti geometriškai. 6 paveiksle pavaizduotas vienetinis apskritimas su centru koordinačių sistemos pradiniame taške O. Tarkime, kad $\smile AC = \alpha$. Tuomet $AB = \sin \alpha$, $AD = \operatorname{tg} \alpha$. 6 paveiksle matyti, kad

$$2\,AB < 2 \smile AC < 2\,AD,$$

arba

$$2 \sin \alpha < 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Gautą nelygybę padalijię iš $2 \sin \alpha$, turime

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

arba

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha.$$

Jeigu $\alpha \to 0$, tai $\cos \alpha \to 1$. Funkcija $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ yra tarp $\cos \alpha$ ir 1. Tai rodo, kad ji artėja prie vieneto, kai $\alpha \to 0$ (būdamas teigiamas). Šį faktą užrašome šitaip:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Jeigu $\alpha \to 0$ būdamas neigiamas, tai šio santykio riba taip pat lygi vienetui. Iš tikrųjų, jeigu α yra neigiamas, tai pažymėję $\alpha = -x$, $x > 0$, gauname:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rasime funkcijos $y = \sin x$ išvestinę. Žinome, kad ši funkcija yra tolydi savo apibrėžimo srityje, todėl jos išvestinės ieškosime bet kuriame taške x. Remiamės išvestinės apibrėžimu:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\sin x \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) =$$

$$= -\sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= (-\sin x) \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Taigi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Jeigu $y = \sin u$ ir $u = g(x)$ (funkcija sudėtinė), tai

$$\boxed{(\sin u)' = \cos u \cdot u'.}$$

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$ išvestinę. Pasinaudoję sudėtinės funkcijos išvestinės formule, gauname:

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)(-2x) =$$

$$= -2x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$$

2. Funkcijos $y = \sin^2 x$ išvestinė randama šitaip:

$$y' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Norėdami rasti funkcijos $y = \cos x$ išvestinę, kosinusą pakeičiame sinusu: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Tada

$$y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

Taigi

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

Jeigu $y = \cos u$ ir $u = g(x)$, tai

$$\boxed{(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.}$$

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ išvestinę.

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\left(\frac{\pi}{3} + x\right)' - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\left(\frac{\pi}{3} - x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

2. $y=\cos^2 x$.

$$y'=2\cos x(\cos x)'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$

Rasime funkcijos $y=\operatorname{tg} x$ išvestinę:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Taigi

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z.}$$

Jeigu $y=\operatorname{tg} u$ ir $u=g(x)$, tai

$$\boxed{(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z.}$$

Diferencijuodami funkciją $y=\operatorname{ctg} x$ gauname

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq k\pi,\ k\in Z.}$$

Kai $y=\operatorname{ctg} u$ ir $u=g(x)$,

$$\boxed{(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 x},\quad x\neq k\pi,\ k\in Z.}$$

Pavyzdžiai. Rasime funkcijų išvestines.

1. $y=x-\operatorname{tg} x$,

$$y'=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}=-\operatorname{tg}^2 x.$$

2. $y=x+\operatorname{ctg} x$,

$$y'=1-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}=\frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}^2 x.$$

3. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

$$y'=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{\cos x}{2\cos^4\frac{x}{2}}.$$

4. $y=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}$,

$$y'=\left(-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'=$$

$$=\left(-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)'\left(1+\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin^4\frac{x}{2}}.$$

1.8. Logaritminės funkcijos išvestinė

Rasime funkcijos $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$ išvestinę.

Fiksuotai argumento x reikšmei suteikiame pokytį $\Delta x\neq 0$, kad būtų $x+\Delta x>0$. Tuomet funkcija y įgyja pokytį Δy. Pakitusi funkcija yra

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x).$$

Iš šios lygybės

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x.$$

Kadangi logaritmų skirtumas lygus dalmens logaritmui, tai

$$\Delta y=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Pažymėję $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$, turime $\Delta x=x\alpha$. Taigi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\alpha}\log_a(1+\alpha),$$

arba

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Matome, kad $\alpha\to 0$, kai $\Delta x\to 0$. Todėl skaičiuodami santykio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ribą, kai $\Delta x\to 0$, gauname

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Čia $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$. Kadangi funkcija $y=\log_a x$ yra tolydi savo apibrėžimo srityje, tai

$$\lim_{\alpha\to 0}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\log_a\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\log_a e.$$

Taigi

$$y'=\frac{1}{x}\log_a e,$$

arba

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e.}$$

Rasime funkcijos $y=\ln x$ išvestinę. Pritaikę bet kokio pagrindo logaritminės funkcijos diferencijavimo taisyklę, gauname

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot\log_e e=\frac{1}{x}.$$

Taigi

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$$

Kai funkcija yra sudėtinė,

$$\boxed{(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'.}$$

Pavyzdžiai. Rasime funkcijų išvestines.

1. $y=\log_2(x^2+3)$,

$$y'=\frac{1}{x^2+3}\cdot\log_2 e\cdot(x^2+3)'=\frac{2x}{x^2+3}\log_2 e.$$

2. $y=\ln(2x^2+4x+3)$,

$$y'=\frac{1}{2x^2+4x+3}\cdot(2x^2+4x+3)'=$$

$$=\frac{4x+4}{2x^2+4x+3}=\frac{4(x+1)}{2x^2+4x+3}.$$

3. $y=\ln\sin^2 x$,

$$y'=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(\sin^2 x)'=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot 2\sin x(\sin x)'=$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x}=2\operatorname{ctg} x.$$

1.9. Laipsnio išvestinė bendruoju atveju

Žinome, kad $(x^n)'=nx^{n-1}$, kai $n \in N$.

Įrodėme, jog ši formulė galioja ir tada, kai n yra bet koks neigiamasis skaičius. Dabar įrodysime, kad ši formulė teisinga ir kai n yra bet koks realusis skaičius, t. y. $n \in R$. Imkime funkciją $y=x^r$, $x>0$, $r \in R$. Abi lygybės puses logaritmuojame pagrindu e:

$$\ln y = r \ln x.$$

Šios lygybės abi puses diferencijuojame atsižvelgdami į tai, kad $\ln y$ yra argumento x sudėtinė funkcija:

$$\frac{1}{y} y' = r \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y \cdot \frac{r}{x}.$$

Kadangi $y=x^r$, tai

$$y' = x^r \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^r \cdot x^{-1} = rx^{r-1}.$$

Vadinasi,

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}.}$$

Matome, kad laipsnio išvestinės formulė tinka ir tuo atveju, kai laipsnio rodiklis yra bet koks realusis skaičius.

Pavyzdžiai. 1. $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$,

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Taigi

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$.

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

3. $y=\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}=(2x^2-1)^{\frac{2}{3}}$. Čia turime sudėtinę funkciją, kurios tarpinis argumentas yra $2x^2-1$.

$$y' = \frac{2}{3}(2x^2-1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x^2-1)' = \frac{2}{3}(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 4x = \frac{8x}{3\sqrt[3]{2x^2-1}}.$$

4. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.10. Rodiklinės funkcijos išvestinė

Rasime funkcijos $y=a^x$, $a>0$, išvestinę. Abi puses logaritmuojame pagrindu e:

$$\ln y=x\ln a.$$

Gautąją lygybę diferencijuojame atsižvelgę į tai, kad $\ln y$ yra sudėtinė argumento x funkcija:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln a,$$

$$y'=y\ln a,$$

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

Tuo atveju, kai $a=e$, gauname

$$(e^x)'=e^x\ln e,$$

$$\boxed{(e^x)'=e^x.}$$

Jeigu $u=u(x)$, tai

$$\boxed{(e^u)'=e^u u'.}$$

Pavyzdžiai. 1. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

$$y'=\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

2. $y=2^x\cdot 3^{x^2}$.

$$y'=(2^x)'\cdot 3^{x^2}+(3^{x^2})'\cdot 2^x=2^x\ln 2\cdot 3^{x^2}+3^{x^2}\ln 3\cdot(x^2)'\cdot 2^x=$$

$$=2^x\cdot 3^{x^2}\ln 2+2x\cdot 2^x\cdot 3^{x^2}\ln 3=2^x 3^{x^2}(\ln 2+2x\ln 3)=$$

$$=2^x\cdot 3^{x^2}(\ln 2+\ln 3^{2x})=2^x\cdot 3^{x^2}\ln(2\cdot 3^{2x}).$$

3. $y=e^{-x}$.

$$y'=e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}(-1)=-e^{-x}.$$

4. $y=e^{-x^2}$.

$$y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2x\,e^{-x^2}.$$

5. $y=e^{-\frac{(x-a)^2}{b^2}}$.

$$y'=e^{-\frac{1}{b^2}(x-a)^2}\cdot\left(-\frac{1}{b^2}(x-a)^2\right)'=$$

$$=e^{-\frac{1}{b^2}(x-a)^2}\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\cdot 2(x-a)(x-a)'\right)=$$

$$=e^{-\frac{1}{b^2}(x-a)^2}\cdot\left(-\frac{2}{b^2}(x-a)\right)=-\frac{2}{b^2}(x-a)\cdot e^{-\frac{1}{b^2}(x-a)^2}=$$

$$=\frac{2}{b^2}(a-x)e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}.$$

1.11. Atvirkštinių trigonometrinių funkcijų išvestinės

1. $y=\arcsin x$. Iš šios funkcijos apibrėžimo išplaukia, kad $x\in[-1,\ 1]$, o $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Be to, $\sin y=x$. Gautosios lygybės abi puses diferencijuojame atkreipdami dėmesį į tai, kad $\sin y$ yra sudėtinė argumento x funkcija:

$$\cos y\cdot y'=1.$$

Iš čia

$$y'=\frac{1}{\cos y}.$$

Iš žinomos formulės $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, turėdami galvoje, kad $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, randame

$$\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y},$$

arba

$$\cos y=+\sqrt{1-x^2}.$$

Taigi

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

arba

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kai funkcija sudėtinė,

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

2. $y = \arccos x$. Šios funkcijos $x \in [-1, 1]$, o $y \in [0, \pi]$. Pagal funkcijos $\arccos x$ apibrėžimą gauname

$$\cos y = x.$$

Gautosios lygybės abi puses diferencijuojame:

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Iš formulės $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ randame

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

Taigi

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

arba

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kai funkcija sudėtinė,

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

3. Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ $(x \in R)$ yra atvirkštinė funkcijai

$$\operatorname{tg} y = x \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Gautosios lygybės abi puses diferencijuojame:

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1.$$

Pasinaudoję trigonometrinių funkcijų sąryšio formule

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

gauname $(1+x^2)y'=1$,

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Taigi

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.}$$

Kai funkcija arctg x yra sudėtinė,

$$\boxed{(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}.}$$

Panašiai gauname ir funkcijos $y=\operatorname{arcctg} x$, $x\in R$, $y\in(0, \pi)$, išvestinę

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.}$$

Kai funkcija sudėtinė,

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}.}$$

Pavyzdžiai. 1. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{x'\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'\cdot x}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{2x\cdot x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

2. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot(\sqrt{1-x^2})'=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

Gauname

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{kai } 0<x<1,$$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{kai } -1<x<0.$$

3. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{(1+x)'(1-x)-(1-x)'(1+x)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2(1+x^2)}(1-x+1+x)=\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=1\cdot\arcsin x+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

1.12. Aukštesniųjų eilių išvestinės

Funkcijos $y=f(x)$ išvestinė užrašoma $y'=f'(x)$ ir vadinama *pirmosios eilės išvestine.* Kaip matome, išvestinė $f'(x)$ yra taip pat funkcija. Tarkime, kad ji turi išvestinę. Pirmosios eilės išvestinės išvestinė vadinama *funkcijos* $f(x)$ *antrosios eilės išvestine,* arba *antrąja išvestine.* Ji žymima y''. Antroji išvestinė taške x žymima $f''(x)$. Taigi

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

Antrosios eilės išvestinės išvestinė vadinama *trečiosios eilės išvestine,* arba *trečiąja išvestine.* Ji žymima

$$f'''(x)=(f''(x))'$$

ir t. t.

Pavyzdžiai. 1. $y=2x^5+x^4+3x^3+x^2+x+1.$

$$y'=10x^4+4x^3+9x^2+2x+1,$$

$y''=40x^3+12x^2+18x+2,$ $\quad$ $y'''=120x^2+24x+18,$

$y^{\mathrm{IV}}=240x+24,$ $\quad$ $y^{\mathrm{V}}=240,\ y^{\mathrm{VI}}=y^{\mathrm{VII}}=\ldots=0.$

2. $y=\sin x$.

$$y'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(2\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(3\frac{\pi}{2}+x\right),$$

. . . .

Galima įrodyti, kad su $\forall\ n\in N$

$$y^{(n)}=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right).$$

3. $y=x^r,\ r\in R.$

$y'=rx^{r-1}, \quad y''=r(r-1)x^{r-2}, \quad y'''=r(r-1)(r-2)x^{r-3}.$

Nesunku pastebėti, kad

$$(x^r)^{(n)}=r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)x^{r-n}.$$

Pavyzdžiui,

$$(x^5)^{\text{IV}}=5\cdot4\cdot3\cdot2x^{5-4}=120x.$$

1.13. Pagrindinių diferencijavimo formulių lentelė

1. $C'=0,$
2. $x'=1,$
3. $(x^n)'=nx^{n-1},$
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$
5. $(u\pm v)'=u'\pm v',$
6. $(uv)'=u'v+v'u,$
7. $(cu)'=cu',$
8. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},$
9. Jeigu $y=f(u)$ ir $u=\varphi(x)$, tai $y'_x=y'_u\cdot u'_x,$
10. $(\sin x)'=\cos x,$
11. $(\cos x)'=-\sin x,$
12. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$
13. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$
14. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
15. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
16. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},$
17. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2};$
18. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e,$
19. $(\ln x)'=\frac{1}{x},$
20. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a,$
21. $(e^x)'=e^x.$

1.14. Pratimai

1. Raskite šių funkcijų išvestines:

1) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1;$
2) $y=\sqrt[3]{x^2};$
3) $y=\sqrt[3]{x^4};$
4) $y=(2x^2+1)(2x^2-1);$
5) $y=(a^2+x^2)(a^2-x^2);$
6) $y=(x-2)(x^2+2x+4);$
7) $y=(x+3)(x^2-3x+9);$
8) $y=\frac{x^3-8}{x-2};$
9) $y=\frac{8x^3+1}{2x+1};$
10) $y=\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3};$

11) $y=\frac{x^3+2x^2+x+1}{a+h}$;

12) $y=v_0t+\frac{at^2}{2}$;

13) $y=\frac{1}{x^n}$;

14) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$;

15) $y=x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$;

16) $y=x\sqrt{x}-3x^2\sqrt[3]{x^2}$;

17) $y=\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$;

18) $y=x(x-1)(x-2)$;

19) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$;

20) $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$.

2. Raskite šių funkcijų išvestines:

1) $y=(3x^2+1)^3$;

2) $y=3(2x^3+1)^4$;

3) $y=\frac{1}{5}(5x^2+2)^5$;

4) $y=(x^2+2x+1)^3$;

5) $y=\sqrt{2x^2-4x}$;

6) $y=\sqrt{4x^3+1}$;

7) $y=\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}$;

8) $y=\sqrt{(2x^3+3)^3}$;

9) $y=\sqrt[4]{(x^2+1)^3}$;

10) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$;

11) $y=(x+1)\sqrt{x^2-1}$;

12) $y=(x^2+3x)\sqrt{x^4-4}$;

13) $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$;

14) $y=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

15) $y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$;

16) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

17) $y=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

18) $y=\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$.

3. Raskite šių funkcijų išvestines:

1) $y=\sin 4x$;

2) $y=x-\operatorname{tg} x$;

3) $y=x+\operatorname{ctg} x$;

4) $y=\sin^2 2x$;

5) $y=-\frac{1}{4}\cos^4 x$;

6) $y=\sin^2 x\cos^2 x$;

7) $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$;

8) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$;

9) $y=\operatorname{ctg}^3 x+3\operatorname{ctg} x$;

10) $y=2\sin^2 x\cos^2 x$;

11) $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$;

12) $y=\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$;

13) $y=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$;

14) $y=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x$;

15) $y=(\operatorname{tg} x-1)\cos x$;

16) $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$;

17) $f(x)=\operatorname{tg}^4 x$. Raskite $f'(0)$ ir $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

18) $f(x)=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$. Raskite $f'(0)$.

19) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$. Raskite $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

20) $f(x)=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$. Raskite $f'(0)$.

21) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$. Raskite $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Raskite šių funkcijų išvestines:

1) $y=\ln^3 x$; 2) $y=\ln\cos x$; 3) $y=\ln\operatorname{tg} x$;

4) $y=\log_2(x^2+1)$; 5) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

6) $y=\ln(1+\cos x)$; 7) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

8) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$; 9) $y=\ln\sqrt{\sin 2x}$;

10) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; 11) $y=\ln\sqrt{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}$;

12) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$; 13) $y=\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$;

14) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}}$; 15) $y=\ln\sin^2 x$;

16) $y=\ln\cos^2 x$; 17) $y=x+\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

18) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; 19) $y=x+\ln\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

20) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 21) $y=\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

22) $y=\ln\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$; 23) $y=\ln\cos\sqrt{1-x^2}$.

5. Raskite šių funkcijų išvestines:

1) $y=e^{\cos x}$; 2) $y=e^{\sin x}$;

3) $y=\ln e^{\cos x}$; 4) $y=2^{2x^2-3x}$;

5) $y=e^{\pi x}\sin\pi x$; 6) $y=\frac{e^x}{1+e^x}$;

7) $y=e^{\sin^2 x}+2^{\ln e}$; 8) $y=\ln e^{2\sqrt{x}}$,

9) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 10) $y=\ln\sqrt{e^{2x}+3}$.

6. Raskite funkcijų išvestines:

1) $y=\arccos\frac{1}{x}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

3) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; 4) $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$;

5) $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $y=\operatorname{arcctg}\frac{2x}{1-x^2}$;

7) $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$; 8) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

9) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 10) $y=\arcsin\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

11) $y=\arccos\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}$, 12) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;

1.15. Atsakymai

2. 1) $18x(3x^2+1)^2$; 2) $72x^2(2x^3+1)^3$; 3) $10x(5x^2+2)^4$; 4) $6(x+1)^5$; 5) $\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x^2-4x}}$; 6) $\frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$; 7) $\frac{8x}{3\sqrt{2x^2+1}}$; 8) $9x^2\sqrt{2x^3+3}$); 9) $\frac{3x}{2\sqrt[4]{x^2+1}}$; 10) $\frac{1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}$; 11) $\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 12) $\frac{4x^5+9x^4-8x-12}{\sqrt{x^4-4}}$; 13) $\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$; 14) $-\frac{x+2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$; 15) $-\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$; 16) $\frac{x(4+x^3)}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}$; 17) $-\frac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$; 18) $\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$.

3. 2) $-\operatorname{tg}^2 x$; 3) $-\operatorname{ctg}^2 x$; 4) $2\sin 4x$; 5) $\cos^3 x\sin x$; 6) $\frac{1}{2}\sin 4x$; 7) $\cos^3 x$; 8) $\operatorname{tg}^4 x$; 9) $-\frac{3}{\sin^4 x}$; 10) $\sin 4x$; 11) $-\sin^3 x$; 12) $\cos 2x$; 13) $\sec^6 x$; 14) $\operatorname{ctg}^6 x$; 15) $\sin x+\cos x$; 16) $-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$; 17) 0; 8; 18) -4; 19) 0; 20) 2; 21) -2;

4. 1) $\frac{3\ln^2 x}{x}$; 2) $-\operatorname{tg} x$; 3) $\frac{2}{\sin 2x}$; 4) $\frac{2x}{x^2+1}\log_2 e$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 7) $\frac{1}{1-x^2}$; 8) $\operatorname{tg}^3 x$; 9) $\operatorname{ctg} 2x$; 10) $\sec x$; 11) $\frac{x^3}{(x^2+4)^2}$; 12) $\sec 2x$; 13) $-\sec x$; 14) $\frac{\sin 2x}{1-\sin^4 x}$; 15) $2\operatorname{ctg} x$; 16) $-2\operatorname{tg} x$; 17) $1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 18) $\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}$; 19) $1-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 20) $\frac{2}{\sin^3 x}$; 21) $\operatorname{tg} x$; 22) $-\operatorname{ctg} x$; 23) $\frac{x\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. 1) $-\sin x e^{\cos x}$; 2) $\cos x e^{\sin x}$; 3) $-\sin x$; 4) $2^{2x^2-3x}(4x-3)\ln 2$; 5) $\pi e^{\pi x}(\sin \pi x+\cos \pi x)$; 6) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$; 7) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 9) $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$; 10) $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$.

6. 1) $\frac{|x|}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\frac{1}{1+x^2}$; 3) $\frac{1}{1-x^2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3+x^2}$; 5) $\frac{1}{1+x^2}$; 6) $-\frac{2}{1+x^2}$; 7) $\sqrt{1-x^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kai $x>0$, arba $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kai $x<0$; 10) $\frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$, kai $\sin x<0$, arba $-\frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$, kai $\sin x<0$; 11) $-\frac{\cos x}{|\cos x|\sin x\sqrt{-\cos 2x}}$. 12) $\frac{1}{2}$, kai $\sin x>0$, arba $-\frac{1}{2}$, kai $\sin x<0$.

2. IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

2.1. Išvestinių taikymas mechanikoje

Plačiau išnagrinėkime kai kurias išvadas, suformuluotas 1.4 skyrelyje. Žinome, kad kūno judėjimo, išreikšto funkcija $s=f(t)$, greitis bet kuriuo laiko momentu t yra tos funkcijos išvestinė, t. y.

$$v=s'.$$

Kai žinome judėjimo lygtį (judėjimo dėsnį), galime apskaičiuoti kūno greitį bet kuriuo laiko momentu.

Išspręskime kelis pavyzdžius.

1. Kūnas juda tiese pagal dėsnį $s=\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t+1$. Raskite jo greitį laiko momentu $t=2$ s, kai kelias s matuojamas metrais.

Žinodami, kad greitis yra kelio išvestinė, galime parašyti:

$$v=s'=\left(\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t+1\right)'=t^2+4t+3.$$

Laiko momentu $t=2$ s, $v=2^2+4\cdot2+3=4+8+3=15$ (m/s).

2. Vertikaliai mesto kūno nueitas kelias apskaičiuojamas pagal formulę $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$; čia v_0 — pradinis greitis, t — laikas, g — laisvai krintančio kūno pagreitis. Po kiek laiko kūnas pasieks didžiausią aukštį?

Aukščiausiame kelio taške kūno greitis bus lygus nuliui. Skaičiuojame greitį bet kuriuo laiko momentu:

$$v=s'=\left(v_0t-\frac{1}{2}gt^2\right)'=v_0-\text{gt}.$$

Pagal uždavinio sąlygą

$$v_0-gt=0,$$

iš čia

$$t=\frac{v_0}{g}.$$

Jeigu laiko momentu t taško greitis buvo v, o momentu $t+\Delta t$ — greitis $v+\Delta v$, tai per laiko tarpą Δt taško greitis pakito dydžiu Δv. Santykis $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ vadinamas taško vidutiniu pagreičiu per laikotarpį Δt. Šio santykio riba

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'$$

vadinama taško pagreičiu laiko momentu t. Pagreitį pažymėję raide a, turime

$$\boxed{a=v'.}$$

Tačiau $v=f'(t)$, todėl

$$v'=(f'(t))'=f''(t),$$

arba

$$\boxed{a=f''(t)=s''.}$$

Taigi tiese judančio taško pagreitis yra lygus kelio antrajai išvestinei laiko atžvilgiu.

Pavyzdžiai. 1. Kūnas juda pagal dėsnį $s=t^3+3t$. Rasime greitį ir pagreitį laiko momentu $t=0{,}5$ s, kai s matuojamas metrais. Žinome, kad $a=s''$, todėl

$$v=(t^3+3t)'=3t^2+3, \quad v_{t=0{,}5}=3(0{,}5)^2+3=3{,}75 \text{ (m/s)}.$$

$$a=6t.$$

$$a_{t=0{,}5}=6\cdot\frac{1}{2}=3 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

2. Materialusis taškas juda pagal dėsnį

$$s=\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{6}t^3-3t^2+1.$$

Apskaičiuosime, kokiu laiko momentu šio taško judėjimo pagreitis bus lygus nuliui:

$$v=s'=\left(\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{6}t^3-3t^2+1\right)'=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t,$$

$$a=t^2-t-6,$$

$$t^2-t-6=0,$$

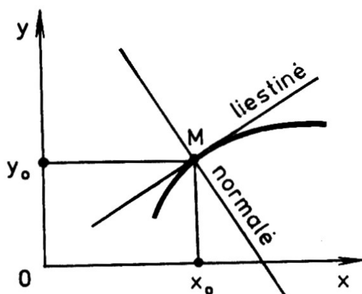
$$t=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}; \quad t_1=-2, \ t_2=3.$$

Ats. Po trijų sekundžių nuo laiko atskaitos pradžios materialaus taško pagreitis yra lygus nuliui.

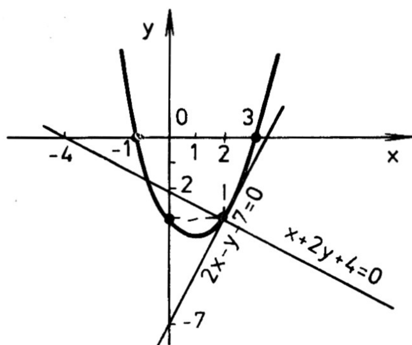
2.2. Kreivės liestinė ir normalė

Iš išvestinės apibrėžimo (1.4) žinome, kad funkcijos $y=f(x)$ grafiko liestinės taške $M(x_0, y_0)$ krypties koeficientas yra lygus tos funkcijos išvestinei taške M, t. y.

$$k=f'(x_0).$$



7 pav.



8 pav.

Žinant liestinės krypties koeficientą ir lietimosi taško koordinates, galima užrašyti jos lygtį. Kadangi liestinė yra tiesė, einanti per tašką $M(x_0, y_0)$ (žr. 7 pav.), tai jos lygtis yra

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Šioje lygtyje vietoje k įrašę $f'(x_0)$, gauname

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

— liestinės lygtį taške $M(x_0, y_0)$. Tiesė, einanti per lietimosi tašką statmenai liestinei, vadinama *normale*. Taigi normalės lygtį galime užrašyti naudodamiesi tiesės, einančios per tašką $M(x_0, y_0)$, lygtimi. Krypties koeficientą k apskaičiuojame pasinaudoję tiesių statmenumo sąlyga $k_1=-\frac{1}{k_2}$. Kadangi liestinės krypties koeficientas lygus $k=f'(x_0)$, tai jai statmenos tiesės — normalės lygtis yra

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).}$$

Pavyzdžiai. 1. Užrašykime funkcijos $y=x^2-2x-3$ grafiko liestinės ir normalės lygtis taške (2, −3). Rašome tiesės, einančios per tašką (2, −3), lygtį:

$$y+3=k(x-2).$$

Skaičiuojame liestinės krypties koeficientą bet kuriame taške:

$$k=y'=2x-2.$$

Kadangi lietimosi taško abscisė yra $x=2$, tai $k=2\cdot2-2=4-2=2$. Taigi liestinės lygtis:

$$y+3=2(x-2),$$
$$y+3=2x-4,$$
$$2x-y-7=0,$$

normalės lygtis:

$$y+3=-\frac{1}{2}(x-2),$$
$$2y+6=-x+2,$$
$$x+2y+4=0.$$

Liestinė ir normalė pavaizduotos 8 paveiksle.

2. Užrašykime kreivės $y=x^2+x-4$ liestinės, lygiagrečios tiesei $y+5x-2=0$, lygtį. Ieškosime lietimosi taško koordinačių (x_1, y_1). Pirmiausia randame kreivės $y=x^2+x-4$ liestinės krypties koeficientą:

$$k=y'=2x+1.$$

Nustatome tiesės $y+5x-2=0$ krypties koeficientą:

$$y=-5x+2, \quad k=-5.$$

Kadangi tos tiesės ir kreivės liestinės krypties koeficientai turi būti lygūs, tai:

$$2x+1=-5;$$
$$2x=-6,$$
$$x=-3.$$

Radome lietimosi taško abscisę. Skaičiuojame to paties taško ordinatę:

$$y=x^2+x-4,$$
$$y=(-3)^2-3-4=9-7=2.$$

Taigi lietimosi taško koordinatės yra $(-3, 2)$, o liestinės lygtis:

$$y-2=-5(x+3),$$
$$y-2=-5x-15,$$
$$5x+y+13=0.$$

2.3. Ferma, Rolio ir Lagranžo teoremos

1 teorema (Ferma* teorema). *Jei funkcija $f(x)$, $x\in(a, b)$, taške x_0 įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę ir šiame taške turi išvestinę, tai $f'(x_0)=0$.*

Įrodymas. Tarkime, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 įgyja didžiausią reikšmę, t. y. $f(x)\leqslant f(x_0)$, $x\in(a, b)$. Vadinasi, $f(x_0+$

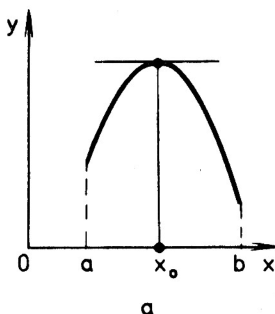
* Fermat Pierre (1601—1665) — prancūzų matematikas.

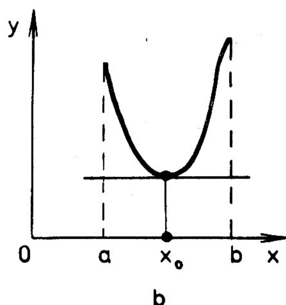
$+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0$ ir $f(x_0-\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0\ (\Delta x>0)$ arba $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant$ $\leqslant 0$ ir $\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\geqslant 0$. Šiose nelygybėse perėję prie ribos, kai $\Delta x\to 0$, gauname:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\leqslant 0 \text{ ir } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)\geqslant 0.$$

Taigi $f'(x_0)=0$.

Paaiškinsime šios teoremos geometrinę prasmę. Taške $(x_0, f(x_0))$ kreivė $y=f(x)$ turi liestinę, kurios krypties koeficientas $k=f'(x_0)=0$, t. y. kreivės liestinė aukščiausiame kreivės taške yra lygiagreti ašiai Ox. Analogiškai galima įrodyti, kad ir žemiausiame kreivės taške liestinė lygiagreti ašiai Ox (9 pav., *a*, *b*).





9 pav. *a*, *b*

2 teorema (Rolio* teorema). *Jeigu funkcija $f(x)$: 1) tolydi uždarajame intervale $[a, b]$, 2) turi išvestinę intervale (a, b), 3) intervalo galuose įgyja lygias reikšmes, t. y. $f(a)=f(b)$, tai tarp taškų a ir b yra bent vienas toks taškas c, kuriame $f'(c)=0$.*

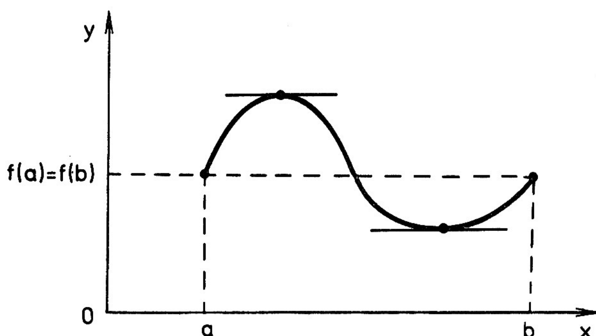
Įrodymas. Kadangi funkcija $f(x)$ yra tolydi uždarajame intervale $[a, b]$, tai ji šiame intervale įgyja didžiausią ir mažiausią reikšmę M ir m. Vadinasi, $m\leqslant f(x)\leqslant M$ su visais $x\in[a, b]$.

Jeigu $M=m$, tai $f(x)=M$ yra pastovi, todėl $f'(x)=0$. Šiuo atveju c gali būti bet koks intervalo (a, b) taškas.

Jeigu $m\neq M$, tai abi reikšmės negali būti įgyjamos intervalo galuose, nes $f(a)=f(b)$. Jeigu didžiausia ar mažiausia reikšmė įgyjama intervalo vidiniame taške c, tai pagal Ferma teoremą $f'(c)=0$.

* Rolle Michel (1652—1719) — prancūzų matematikas.

Rolio teorema turi paprastą geometrinę prasmę: jeigu kreivės grafiko galų ordinatės lygios, tai bent viename kreivės taške liestinė yra lygiagreti ašiai Ox (10 pav.).



10 pav.

3 teorema (Lagranžo * teorema). *Jeigu funkcija* $f(x)$: 1) *tolydi uždarajame intervale* $[a, b]$; 2) *turi išvestinę atvirajame intervale* (a, b), *tai tarp taškų* a *ir* b *yra bent vienas toks taškas* c, *kad*

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).} \qquad (1)$$

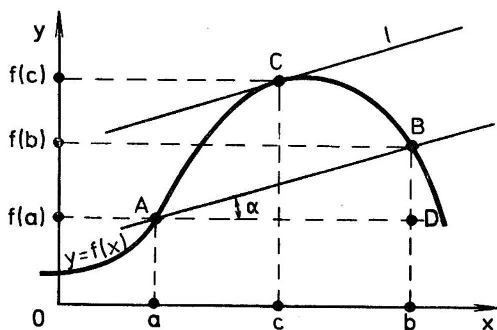
Įrodymas. Nagrinėkime funkciją $g(x)=f(x)-\lambda x$. Parinkime tokią λ reikšmę, kad funkcija $g(x)$ intervalo $[a, b]$ galuose turėtų lygias reikšmes:

$$g(a)=g(b), \quad \text{arba} \quad f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b, \quad \text{t. y.} \quad \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Su šia λ reikšme funkcija $g(x)$ tenkina Rolio teoremos reikalavimus, todėl tarp a ir b yra bent vienas toks taškas c, kad $g'(c)=0$. Kadangi $g'(x)=f'(x)-\lambda$, tai $f'(c)=\lambda$ ir $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Šią lygybę padauginę iš $b-a$, gauname (1) formulę.

11 paveiksle matyti, kad $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ yra kirstinės, jungiančios kreivės galinius taškus A ir B, krypties koeficientas, o $f'(c)$ — liestinės taške $(c, f(c))$ krypties koeficientas. Iš Lagranžo teoremos išplaukia, kad bent viename kreivės AB taške liestinė yra lygiagreti kirstinei, jungiančiai kreivės galus.

* Lagrange Joseph Louis (1736—1813) — prancūzų matematikas.



11 pav.

Pavyzdys. Funkcija $f(x)=2x-x^2$ uždarajame intervale [1, 3] tenkina Lagranžo teoremos reikalavimus, nes ji yra tolydi ir be to diferencijuojama intervale (1, 3). Vadinasi, tarp taškų $a=1$ ir $b=3$ yra toks taškas c, kad $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$, t. y. $2-2c=-2$. Taigi $c=2$.

2.4. Funkcijos didėjimas ir mažėjimas

1 teorema. *Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė intervale (a, b) lygi nuliui, tai funkcija $f(x)$ yra pastovi tame intervale.*

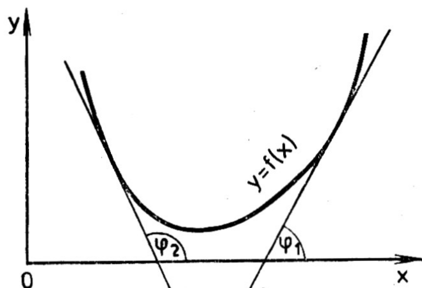
Įrodymas. Imkime tašką x_0, priklausantį intervalui (a, b) ir bet kurį kitą tašką x. Uždarajame intervale $[x_0, x]$ funkcija $f(x)$ tenkina Lagranžo teoremos reikalavimus, todėl $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, $c\in(x_0, x)$, t. y. $f(x)=f(x_0)$ su visais x iš intervalo (a, b). Vadinasi, $f(x)$ šiame intervale yra pastovi.

Išvada. *Jei dviejų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestinės intervale (a, b) yra lygios, t. y. $f'(x)=g'(x)$, kai $a<x<b$, tai tos funkcijos intervale (a, b) skiriasi tik konstanta.*

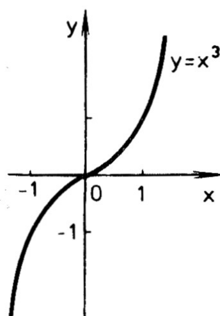
Įrodymas. Kadangi funkcijos $f(x)-g(x)$ išvestinė $(f(x)-(g(x))'=f'(x)-g'(x)=0$, tai $f(x)-g(x)$ intervale (a, b) yra pastovi, t. y. $f(x)-g(x)=C$ arba $f(x)=g(x)+C$.

2 teorema (būtinoji funkcijos didėjimo sąlyga). *Jei funkcija $f(x)$ intervale (a, b) yra diferencijuojama ir didėjanti, tai jos išvestinė tame intervale yra neneigiama.*

Įrodymas. Kadangi funkcija $f(x)$ yra didėjanti, tai $f(x+\Delta x)>f(x)$, jei $\Delta x>0$, ir $f(x+\Delta x)<f(x)$, jei $\Delta x<0$. Abiem



12 pav.



13 pav.

atvejais $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$. Šioje nelygybėje perėję prie ribos, kai $\Delta x\to 0$, gauname $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0$, t. y. $f'(x)\geqslant 0$. Pagal 1 teoremą $f'(x)$ gali būti lygi nuliui tik atskiruose intervalo (a, b) taškuose.

3 teorema (būtinoji funkcijos mažėjimo sąlyga). *Jei funkcija $f(x)$ intervale (a, b) yra diferencijuojama ir mažėjanti, tai jos išvestinė tame intervale yra neteigiama.*

Teoremos įrodymas analogiškas 2 teoremos įrodymui.

2 ir 3 teoremas paaiškinsime geometriškai. Funkcijos $f(x)$ grafikas yra tolydi kreivė, turinti kiekviename taške liestinę (žr. 12 pav.). Kai funkcija didėja, jos grafiko liestinė su ašimi Ox sudaro smailiuosius kampus, todėl $\operatorname{tg}\varphi_1=f'(x)>0$. Kai funkcija mažėja, jos grafiko liestinė su ašimi Ox sudaro bukuosius kampus, todėl $\operatorname{tg}\varphi_2=f'(x)<0$. Abiem atvejais kai kuriuose taškuose liestinės gali būti lygiagrečios ašiai Ox. 13 paveiksle pavaizduotas didėjančios funkcijos $f(x)=x^3$ grafikas. Funkcijos išvestinė $f'(x)=3x^2\geqslant 0$ ir taške $x=0$ lygi nuliui. Taške $(0, 0)$ grafiko liestinė sutampa su ašimi Ox.

4 teorema (pakankamoji funkcijos didėjimo (mažėjimo) sąlyga). *Jeigu funkcijos $f(x)$ išvestinė intervale (a, b) yra teigiama (neigiama), t. y. $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) su visais $x\in(a, b)$, tai tame intervale funkcija didėja (mažėja).*

Į r o d y m a s. Sakykime, $x_1<x_2$, x_1, $x_2\in(a, b)$. Iš Lagranžo teoremos, pritaikytos funkcijai $f(x)$ uždarajame intervale $[x_1, x_2]$, išplaukia, kad

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

kai $c \in (x_1, x_2)$. Kadangi $x_2 - x_1 > 0$, tai $f(x_2) - f(x_1) > 0$, kai $f'(c) > 0$, ir $f(x_2) - f(x_1) < 0$, kai $f'(c) < 0$. Tai reiškia, kad $f(x)$ didėja intervale (a, b), kai $f'(x) > 0$, ir mažėja, kai $f'(x) < 0$.

Matome, kad kai kuriuose intervalo taškuose $f'(x)$ gali būti lygi nuliui arba neegzistuoja (žr. 13, 14 pav.).

Suformuluosime funkcijos didėjimo ir mažėjimo, t. y. monotoniškumo intervalų radimo taisyklę.

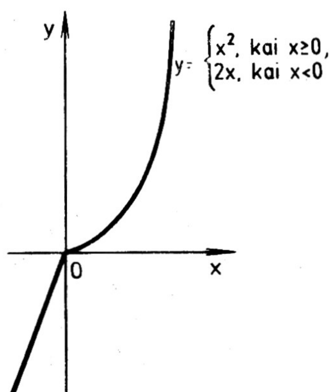
Norint rasti funkcijos monotoniškumo intervalus, reikia:

1) *rasti taškus, kuriuose $f'(x)$ lygi nuliui arba neegzistuoja; šie taškai dalija funkcijos apibrėžimo sritį į intervalus, kuriuose $f'(x)$ nekeičia ženklo;*

2) *nustatyti $f'(x)$ ženklą kiekviename intervale; funkcija didėja tame intervale, kai $f'(x) > 0$, ir mažėja, kai $f'(x) < 0$.*

Pavyzdys. Rasime funkcijos $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ didėjimo ir mažėjimo (t. y. monotoniškumo) intervalus.

Ši funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Kadangi $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, tai išvestinė lygi nuliui tik taškuose 1 ir 3. Šie taškai funkcijos apibrėžimo sritį dalija į intervalus $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ ir $(3, +\infty)$. Išvestinės ženklą nustatome remdamiesi intervalų metodu (žr. 15 pav.). Taigi funkcija didėja intervaluose $(-\infty, 1)$ ir $(3, +\infty)$ bei mažėja intervale $(1, 3)$.



14 pav.

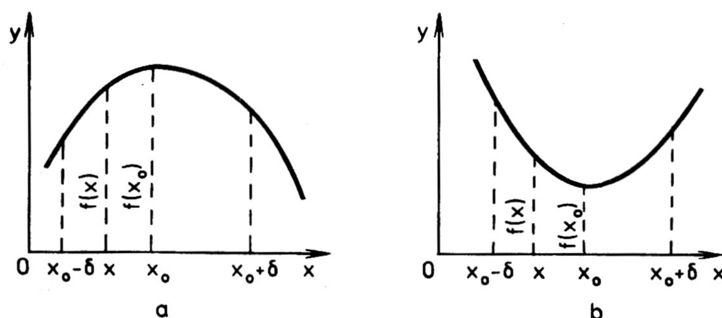


15 pav.

2.5. Funkcijos ekstremumai

1 apibrėžimas. *Taškas* x_0 *vadinamas funkcijos* $f(x)$ *maksimumo tašku, jeigu egzistuoja toks intervalas* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, *kad* $f(x)<f(x_0)$, $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ (žr. 16 pav., *a*).

2 apibrėžimas. *Taškas* x_0 *vadinamas funkcijos* $f(x)$ *minimumo tašku, jeigu* $f(x)>f(x_0)$ *su visais* $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ (žr. 16 pav., *b*).



16 pav.

Funkcijos maksimumo ir minimumo taškai vadinami *funkcijos ekstremumo taškais,* o funkcijos reikšmės tuose taškuose — *funkcijos maksimumais ir minimumais,* arba *ekstremumais.*

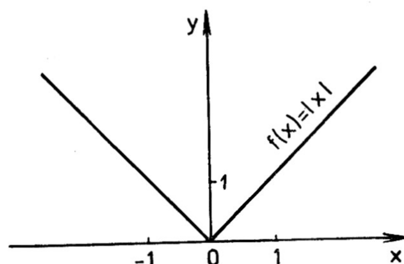
Iš apibrėžimų išplaukia, kad funkcijos ekstremumo taškai yra vidiniai funkcijos apibrėžimo srities taškai. Iš Ferma teoremos išplaukia būtinosios diferencijuojamos funkcijos ekstremumo sąlygos.

1 teorema. *Jei funkcija* $f(x)$ *taške* x_0 *yra diferencijuojama ir jame įgyja ekstremumą, tai* $f'(x_0)=0$.

Vadinasi, ekstremumų reikia ieškoti taškuose, kuriuose $f'(x)=0$. Tačiau ne visi taškai, kuriuose $f'(x)=0$, yra funkcijos ekstremumo taškai. Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=x^3$ taške $x=0$ ekstremumo neturi, nors $f'(0)=3\cdot 0^2=0$ (žr. 13 pav.). Kita vertus, funkcija $f(x)=|x|$ taške $x=0$ įgyja ekstremumą (minimumą), tačiau tame taške išvestinės neturi (17 pav.).

Taškai, kuriuose $f'(x)$ lygi nuliui arba neegzistuoja, vadinami *funkcijos* $f(x)$ *kritiniais taškais.*

Ar funkcija įgyja kritiniuose taškuose ekstremumą, tiriama papildomai.



17 pav.

2 teorema (pakankamoji ekstremumo sąlyga). *Sakykime, egzistuoja intervalas* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, *kuriame funkcija* $f(x)$ *yra tolydi ir turi išvestinę (išskyrus galbūt tašką* x_0), *o tos išvestinės ženklas intervaluose* $(x_0-\delta, x_0)$ *ir* $(x_0, x_0+\delta)$ *nesikeičia. Tada:*

a) *jeigu išvestinė* $f'(x)$, *kai* x *pereina tašką* x_0, *keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai taškas* x_0 *yra funkcijos maksimumo taškas;*

b) *jeigu* $f'(x)$, *kai* x *pereina tašką* x_0, *keičia ženklą iš minuso į pliusą, tai* x_0 *yra funkcijos minimumo taškas;*

c) *jeigu* $f'(x)$, *kai* x *pereina tašką* x_0, *ženklo nekeičia, tai taške* x_0 *funkcija ekstremumo neturi.*

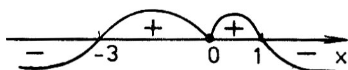
Įrodymas. a) Sakykime, kad $f'(x)>0$, kai $x\in(x_0-\delta, x_0)$, ir $f'(x)<0$, kai $x\in(x_0, x_0+\delta)$. Tuomet funkcija $f(x)$ didėja intervale $(x_0-\delta, x_0)$, t. y. $f(x)<f(x_0)$ su visais $x\in(x_0-\delta, x_0)$, ir mažėja intervale $(x_0, x_0+\delta)$, t. y. $f(x_0)>f(x)$ su visais $x\in(x_0, x_0+\delta)$. Taigi $f(x)<f(x_0)$, kai $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$.

Kiti du atvejai įrodomi analogiškai.

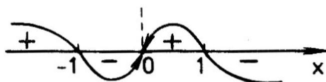
Pavyzdžiai. 1. Rasime funkcijos $f(x)=x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{5}$ monotoniškumo intervalus, ekstremumus.

Kadangi $f'(x)=3x^2-2x^3-x^4=x^2(x+3)(1-x)$, tai funkcija $f(x)$ gali įgyti ekstremumus tik taškuose -3, 0 ir 1. Šie taškai funkcijos apibrėžimo sritį dalija į intervalus $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 1)$ ir $(1, +\infty)$. Išvestinės ženklą šiuose intervaluose nustatysime intervalų metodu (žr. 18 pav.). Taigi funkcija mažėja intervaluose $(-\infty, -3)$ ir $(1, +\infty)$, o didėja intervale $(-3, 1)$, taške $x=-3$ įgyja minimumą $f_{min}(-3)=-18\frac{9}{10}$, taške $x=0$ ekstremumo neturi ir taške $x=1$ įgyja maksimumą $f_{max}(1)=\frac{3}{10}$.

2. Rasime funkcijos $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$ ekstremumus.



18 pav.



19 pav.

Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x)=2(x^{-\frac{1}{3}}-x)=\frac{2(1-x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}.$$

$f'(x)$ lygi nuliui taškuose -1 ir 1. Taške 0 išvestinė neegzistuoja. $f'(x)$ ženklą intervaluose $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ir $(1, +\infty)$ nustatysime intervalų metodu (žr. 19 pav.). Taigi funkcija turi du maksimumus $f_{max}(-1)=2$, $f_{max}(1)=2$ ir vieną minimumą $f_{min}(0)=0$.

Ekstremumus taip pat galima tirti naudojantis funkcijos antrąja išvestine.

3 **teorema** (pakankamoji ekstremumo sąlyga). *Jeigu funkcija* $f(x)$ *intervale* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *turi pirmąją ir antrąją išvestines,* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, *tai taške* x_0 *funkcija įgyja maksimumą, kai* $f''(x_0)<0$, *ir minimumą, kai* $f''(x_0)>0$.

Įrodymas. Sakykime, intervale $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $f''(x)>0$. Tuomet funkcija $f'(x)$ šiame intervale yra didėjanti. Kadangi $f'(x_0)=0$, tai x pereinant tašką x_0 $f'(x)$ keičia ženklą iš minuso į pliusą. Vadinasi, funkcija $f(x)$ taške x_0 įgyja minimumą. Analogiškai įrodoma, kad taške x_0 funkcija įgyja maksimumą, kai $f''(x_0)<0$.

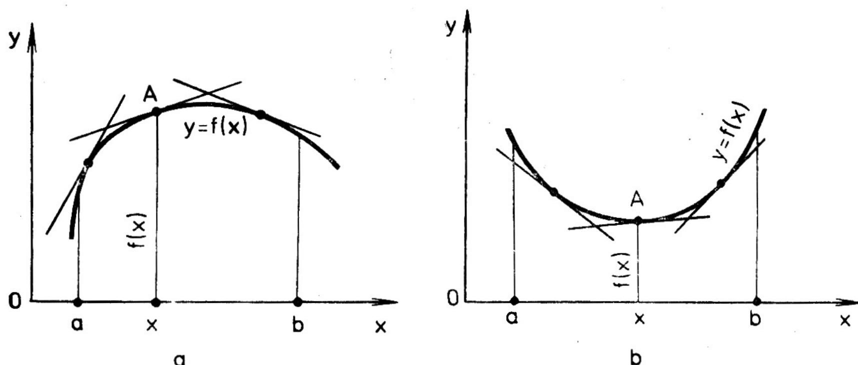
Pavyzdys. Rasime funkcijos $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-4$ ekstremumus.

Kadangi $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, tai kritiniai taškai yra du: $x_1=1$, $x_2=3$.

Randame antrąją išvestinę $f''(x)=2x-4$ ir apskaičiuojame jos reikšmę kritiniuose taškuose: $f''(1)=-2<0$, $f''(3)=2>0$. Vadinasi, taške $x=1$ funkcija įgyja maksimumą $f_{max}(1)=-2\frac{2}{3}$, o taške $x=3$ — minimumą $f_{min}(3)=-4$.

2.6. Kreivės iškilumas, vingio taškai

1 apibrėžimas. *Funkcijos $f(x)$ grafiką vadinsime iškilu aukštyn intervale (a, b), jei kreivės $y=f(x)$ lankas yra po liestine, nubrėžta per bet kurį lanko tašką $A_1(x, f(x))$* (žr. 20 pav., *a*). Intervalą (a, b) vadinsime grafiko *iškilumo aukštyn intervalu.*



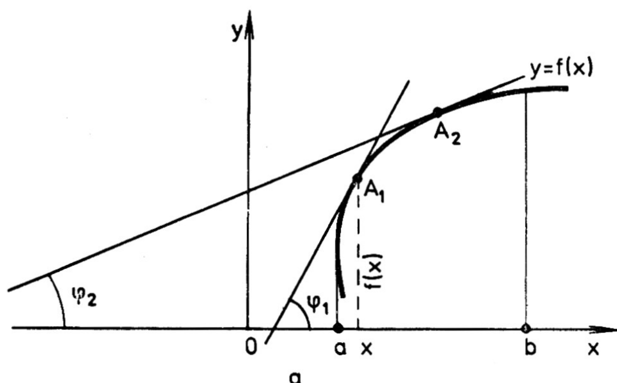
20 pav. *a, b*

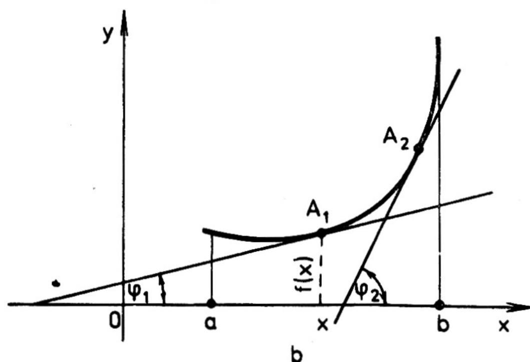
2 apibrėžimas. *Funkcijos $f(x)$ grafiką vadinsime iškilu žemyn intervale (a, b), jei kreivės $y=f(x)$ lankas yra virš liestinės, nubrėžtos per bet kurį to lanko tašką $A_1(x, f(x))$* (žr. 20 pav., *b*). Intervalą (a, b) vadinsime grafiko *iškilumo žemyn intervalu.*

Pažymėsime, kad iškilumo aukštyn intervale funkcijos išvestinė yra mažėjanti. 21 paveiksle, *a*, matyti, kad, didėjant argumento x reikšmei, liestinės krypties koeficientas $\operatorname{tg}\varphi=k=f'(x)$ mažėja. Pažvelgę į 21 paveikslą, *b*, galime teigti, kad iškilumo žemyn intervale $f'(x)$ yra didėjanti.

1 teorema (pakankamosios funkcijos grafiko iškilumo sąlygos). *Sakykime, funkcija $f(x)$ intervale (a, b) turi pirmąją ir antrąją išvestines. Jeigu su visais $x\in(a, b)$ $f''(x)<0$, tai funkcijos $f(x)$ grafikas tame intervale yra iškilas aukštyn; jeigu $f''(x)>0$ su visais $x\in(a, b)$, tai funkcijos $f(x)$ grafikas tame intervale yra iškilas žemyn.*

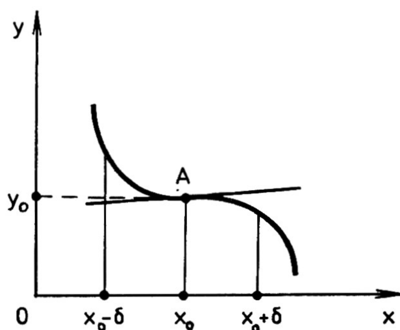
Į r o d y m a s. Sakykime, kad $f''(x)<0$ su visais $x\in(a, b)$. Pagal 2.4 skyrelio 4 teoremą $f'(x)$ mažėja intervale (a, b). Vadinasi funkcijos $f(x)$ grafikas yra iškilas aukštyn. Analogiškai įrodoma, kad funkcijos $f(x)$ grafikas yra iškilas žemyn, kai $f''(x)>0$.





21 pav. *a, b*

3 apibrėžimas. *Kreivės tašką, kurį pereinant kreivės iškilumas aukštyn keičiasi iškilumu žemyn arba iškilumas žemyn keičiasi iškilumu aukštyn, vadinsime kreivės vingio tašku* (22 pav.).

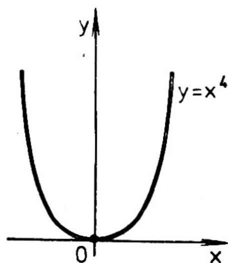


22 pav.

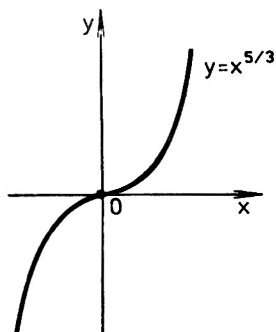
2 teorema (būtinosios vingio taško sąlygos). *Jeigu funkcija $f(x)$ intervale (a, b) turi tolydžias pirmosios ir antrosios eilės išvestines ir taškas $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$, yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas, tai $f''(x_0) = 0$.*

Įrodymas. Sakykime, $f''(x_0) > 0$ (arba $f''(x_0) < 0$). Kadangi $f''(x)$ yra tolydi, tai galima rasti tokį intervalą $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kad būtų $f''(x) > 0$ (arba $f''(x) < 0$) su visais x iš to intervalo. Pagal 1 teoremą funkcijos $f(x)$ grafikas intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ yra iškilas žemyn (aukštyn). Gavome prieštarą, kad taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos grafiko vingio taškas. Vadinasi, $f''(x_0) = 0$.

Teoremoje nusakytos tik būtinosios vingio taško egzistavimo sąlygos. Pavyzdžiui, funkcijos $f(x) = x^4$ grafikas (žr. 23 pav.) taške (0, 0) neturi vingio, nors $f''(x) = 12x^2$ lygi nuliui, kai $x = 0$. Kita vertus, funkcija $f(x) = x^{5/3}$ grafikas taške (0, 0) turi vingį (žr. 24 pav.), nors $f''(x)$ taške $x = 0$ neegzistuoja.



23 pav.



24 pav.

Taigi taškai, su kurių abscisėmis $f''(x)$ lygi nuliui arba neegzistuoja, yra galimi funkcijos grafiko vingio taškai.

3 teorema (pakankamosios vingio taško sąlygos). *Sakykime, kad funkcija $f(x)$ taške x_0 turi išvestinę, o intervaluose $(x_0 - \delta, x_0)$ bei $(x_0, x_0 + \delta)$ — ir antrąją išvestinę. Jeigu $f''(x)$ tuose intervaluose yra skirtingų ženklų, tai taškas $(x_0, f(x_0))$ yra funkcijos grafiko vingio taškas; jeigu $f''(x)$ abiejuose intervaluose yra vienodų ženklų, tai taškas $(x_0, f(x_0))$ nėra funkcijos grafiko vingio taškas.*

Teorema išplaukia iš 1 teoremos ir vingio taško apibrėžimo.

Suformuluosime iškilumo intervalų ir vingio taškų radimo taisyklę.

Norint rasti funkcijos grafiko iškilumo intervalus ir vingio taškus, reikia:

1) *rasti taškus, kuriuose $f''(x)$ lygi nuliui arba neegzistuoja; jie apibrėžimo sritį suskaido į iškilumo intervalus;*

2) *nustatyti $f''(x)$ ženklą kiekviename intervale; jeigu $f''(x)$ ženklas keičiasi pereinant iš vieno intervalo į kitą gretimą ir x_0 yra tų intervalų bendras galas, tai taške $(x_0, f(x_0))$ funkcijos grafikas turi vingį, jeigu $f''(x)$ ženklas nesikeičia — vingio nėra.*

Pavyzdys. Rasime kreivės $y=6x^2-x^3$ iškilumo intervalus, vingio taškus.

1) Kadangi $f'(x)=12x-3x^2$, $f''(x)=12-6x$, tai tik viename taške $x=2$ antroji išvestinė lygi nuliui; taškas $x=2$ apibrėžimo sritį dalija į du intervalus $(-\infty, 2)$ ir $(2, +\infty)$;

2) Pirmajame intervale antroji išvestinė yra teigiama, o antrajame — neigiama. Vadinasi, intervale $(-\infty, 2)$ funkcijos grafikas yra iškilas žemyn, o intervale $(2, +\infty)$ — iškilas aukštyn. Taškas $(2, 16)$ yra grafiko vingio taškas.

2.7. Kreivės asimptotės

Tiriant kai kurių funkcijų kitimą, kai $x \to -\infty$ ir $x \to +\infty$ arba arti antrosios rūšies trūkio taškų (žr. 1 d. 4.12.1), galima pastebėti, kad jų grafikai artėja prie tam tikrų tiesių, kurios vadinamos asimptotėmis.

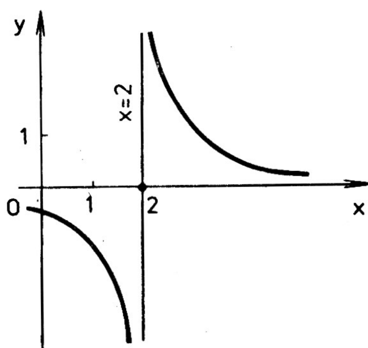
1 apibrėžimas. *Tiesė $x=x_0$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ grafiko vertikaliąja asimptote, jeigu bent viena iš ribų $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ arba $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ yra $+\infty$ arba $-\infty$.*

Pavyzdžiui, funkcijos $y=\frac{1}{x-2}$ grafiko asimptotė yra tiesė $x=2$ (žr. 25 pav.), nes $\lim\limits_{x \to 2-}\frac{1}{x-2}=-\infty$ arba $\lim\limits_{x \to 2+}\frac{1}{x-2}=+\infty$. Be to, $\lim\limits_{x \to 2}\frac{1}{x-2}$ neegzistuoja.

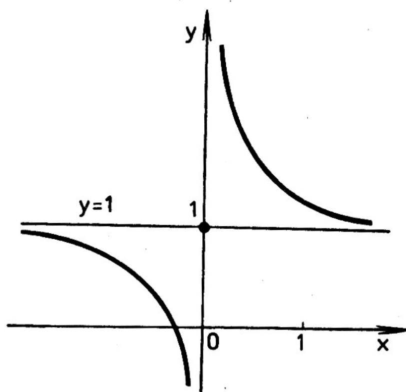
2 apibrėžimas. *Tiesė $y=a$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ grafiko horizontaliąja asimptote, jeigu*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x)=a.$$

Pavyzdžiui, funkcijos $y=\frac{1}{x}+1$ grafiko asimptotė yra tiesė $y=1$, nes $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1$ (žr. 26 pav.).



25 pav.



26 pav.

3 apibrėžimas. *Tiesė $y=kx+b$ vadinama funkcijos $y=f(x)$ grafiko pasvirąja asimptote, jeigu egzistuoja ribos*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}=k \ \textit{ir} \ \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}(f(x)-kx)=b$$

(būtinoji ir pakankamoji sąlyga).

Pavyzdys. Rasime kreivės $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ asimptotes. Kadangi $\lim\limits_{x\to2+}\frac{x^2+1}{x-2}=+\infty$, o $\lim\limits_{x\to2-}\frac{x^2+1}{x-2}=-\infty$, tai tiesė $x=2$ yra vertikalioji asimptotė. Randame k:

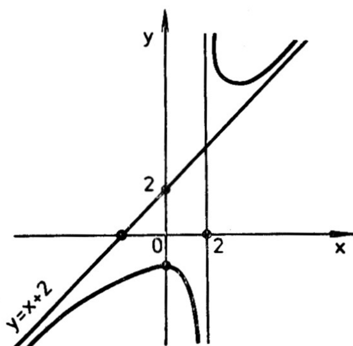
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

Apskaičiuojame b:

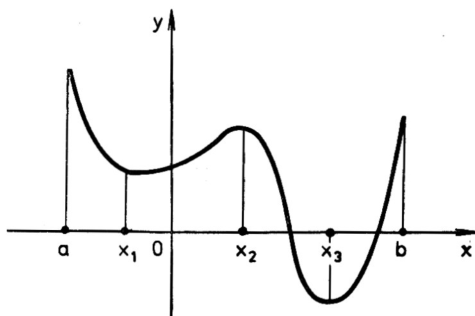
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx),\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

Taigi tiesė $y=x+2$ yra pradinės funkcijos pasviroji asimptotė. Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 27 paveiksle.



27 pav.



28 pav.

2.8. Didžiausioji ir mažiausioji funkcijos reikšmės

Sakykime, funkcija $y=f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$ ir diferencijuojama kiekviename to intervalo taške. Reikia apskaičiuoti jos didžiausią ir mažiausią reikšmes tame intervale.

Jeigu funkcija monotoninė, tai didžiausia arba mažiausia jos reikšmės yra intervalo $[a, b]$ galuose:

a) jei $f(x)$ didėjanti, tai $f(a)$ — mažiausia, o $f(b)$ — didžiausia jos reikšmė;

b) jei $f(x)$ mažėjanti, tai $f(a)$ — didžiausia, o $f(b)$ — mažiausia jos reikšmė.

Jeigu funkcija $y=f(x)$ nėra monotoninė (žr. 28 pav.), tai jos didžiausia reikšmė yra arba viename iš maksimumo taškų, arba viename iš intervalo $[a, b]$ galų. 28 paveiksle $f(a)$ yra didžiausia, o $f(x_3)$ — mažiausia funkcijos reikšmė.

Ieškodami funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės kuriame nors intervale, naudojamės šitokia schema:

1. Randame intervalo viduje esančius funkcijos kritinius taškus;
2. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes kritiniuose taškuose;
3. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo galuose;
4. Iš visų gautųjų skaičių išrenkame didžiausią ir mažiausią.

Pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale $[-3, 6]$.

Randame kritinius taškus: $f'(x)=6x^2-6x-36$, $6x^2-6x-36=$ $=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$, $x_1=-2$, $x_2=3$. Abi šios reikšmės priklauso nurodytam intervalui. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes kriti-

niuose taškuose: $f(-2)=36$, $f(3)=-89$. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo $[-3, 6]$ galuose: $f(-3)=19$, $f(6)=100$. Kaip matome, iš visų apskaičiuotųjų reikšmių didžiausia yra 100, o mažiausia — -89.

2.9. Funkcijų tyrimas ir grafikų braižymas

Jau išmokome rasti funkcijos ekstremumus, grafiko iškilumo aukštyn ar žemyn intervalus, vingio taškus, didžiausias arba mažiausias jos reikšmes bei asimptotes. Naudodamiesi šiomis ir dar papildomomis žiniomis, galime apytiksliai nubraižyti funkcijos grafiką, rodantį jos kitimą. Funkciją tiriame ir jos grafiką braižome naudodamiesi tam tikra schema:

1. Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį;
2. Ištiriame, ar funkcija yra nelyginė, lyginė, periodinė;
3. Nustatome funkcijos trūkio taškus;
4. Randame kritinius taškus;
5. Nustatome funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus;
6. Randame funkcijos maksimumo ir minimumo taškus;
7. Apskaičiuojame grafiko vingio taškų koordinates;
8. Nustatome iškilumo intervalus;
9. Randame funkcijos grafiko asimptotes;
10. Apskaičiuojame funkcijos grafiko susikirtimo su abscisių ir ordinačių ašimis taškus;
11. Braižome funkcijos grafiką.

Pavyzdžiai. 1. Ištirkime funkciją $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ ir nubraižykime jos grafiką.

1. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė $(x\in R)$.

2. Funkcija neperiodinė, nelyginė, todėl jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

3. Funkcija tolydi visoje apibrėžimo srityje.

4. Randame kritinius taškus:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=x^2-4;\ x^2-4=0;\ x_1=-2;\ x_2=2.$$

5. Skaičių ašyje pažymėję kritinius taškus, nustatome funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumus (pravartu

prisiminti, kad atskiruose intervaluose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą):

$$f'(-3)=9-4=5>0,\ f'(0)=-4<0,\ f(3)=9-4=5>0.$$

Matome, kad intervale $(-\infty, -2)$ $f(x)$ didėja (žymime ↗), intervale $(-2, 2)$ mažėja (žymime ↘), o intervale $(2, +\infty)$ vėl didėja.

6. Randame antrąją funkcijos išvestinę ir ja naudojamės tirdami funkciją ir braižydami jos grafiką:

$$f''(x)=(x^2-4)'=2x;\ f''(-2)=2(-2)=-4<0;\ f''(2)=4>0;$$
$$2x=0,\ x=0.$$

Kai $x=-2$, funkcija turi maksimumą, t. y. $f(-2)=-\frac{8}{5}+8=$ $=5\frac{1}{3}$; kai $x=2$ — minimumą, t. y. $f(2)=\frac{8}{3}-8=-5\frac{1}{3}$.

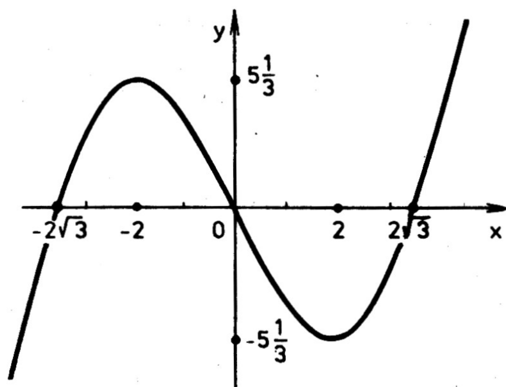
7. Nustatome grafiko iškilumo intervalus: intervale $(-\infty, 0)$ $f''(x)<0$, todėl jame kreivė yra iškila aukštyn; intervale $(0, +\infty)$ $f''(x)>0$, taigi jame kreivė yra iškila žemyn.

8. $O(0, 0)$ yra funkcijos grafiko vingio taškas.

9. Randame funkcijos $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ grafiko susikirtimo taškus su abscisių ašimi:

$$\frac{1}{3}x^3-4x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0,\ x_1=0;\ \frac{1}{3}x^2-4=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=12,\ x_2=-2\sqrt{3},\ x_3=2\sqrt{3}.$$

Atsižvelgdami į visus tyrimo rezultatus, braižome grafiką (žr. 29 pav.). Norint gauti tikslesnį grafiką, reikia apskaičiuoti papildomų taškų.



29 pav.

2. Ištirkime funkciją $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ ir nubraižykime jos grafiką. Tiriame pagal anksčiau pateiktą schemą:

1. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė.

2. Funkcija lyginė, todėl jos grafikas yra simetriškas ašies Oy atžvilgiu.

3. Funkcija tolydi savo apibrėžimo srityje.

4. Randame funkcijos kritinius taškus:

$f'(x)=x^3-4x$; $x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0$, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$. Šiuos taškus pažymėję skaičių ašyje, randame $f(x)$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Remdamiesi pakankamosiomis ekstremumų sąlygomis, nustatome, kad taškuose $x=-2$ ir $x=2$ funkcijos reikšmė yra minimali, t. y. $f(-2)=f(2)=-1$, o taške $x=0$ — maksimali, t. y. $f(0)=3$. Taigi turime grafiko taškus $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 3)$.

5. Randame $f(x)$ antrąją išvestinę ir nustatome kreivės iškilumo bei vingio taškus:

$$f''(x)=(x^3-4x)'=3x^2-4;\ 3x^2-4=0,\ x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Intervaluose $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ir $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ $f''(x)>0$, todėl juose kreivė yra iškila žemyn, o intervale $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $f''(x)<0$ — kreivė iškila aukštyn.

6. Apskaičiuojame vingio taškų ordinates:

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{7}{9},\ f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{7}{9}.$$

Taigi vingio taškų koordinatės yra

$$D\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{9}\right),\ E\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{7}{9}\right).$$

7. Randame funkcijos grafiko susikirtimo taškus su ašimi Ox.

8. Remdamiesi 2.4.4 skyrelio pirmuoju, antruoju ir trečiuoju apibrėžimu, galime tvirtinti, kad funkcijos $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ grafikas neturi asimptočių.

Iš tikrųjų $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+3\right)$ negali būti lygi $-\infty$ arba $+\infty$, todėl pagal **1** apibrėžimą $f(x)$ neturi vertikaliosios asimptotės; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+3\right)$ negali būti lygi kokiam nors pastoviam skai-

čiui a, todėl pagal 2 apibrėžimą $f(x)$ neturi horizontaliosios asimptotės; reiškiniai

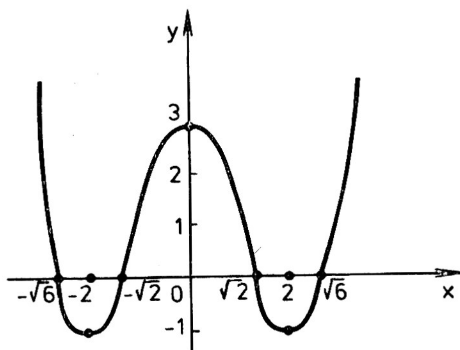
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{4}x^4-2x^2+3}{x} \text{ ir } \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+3-kx\right)$$

neturi baigtinių ribų, todėl pagal 3 apibrėžimą $f(x)$ neturi ir pasvirosios asimptotės.

9. Randame funkcijos $f(x)$ grafiko susikirtimo taškus su ašimi Ox:

$$\frac{1}{4}x^4-2x^2+3=0,$$
$$x^4-8x^2+12=0,$$
$$x^2=y;$$
$$y^2-8y+12=0;\quad y_1=2,\quad y_2=6.$$
$$x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2};\quad x^2=6,\ x=\pm\sqrt{6}.$$

Atsižvelgdami į tyrimo rezultatus, braižome grafiką (žr. 30 pav.).



30 pav.

3. Kūnas juda pagal dėsnį $s(t)=62{,}6+54t^2-0{,}2t^5$; čia s matuojamas metrais, t — sekundėmis.

Kokiu laiko momentu kūnas judės maksimaliu greičiu? Koks bus jo greitis ir pagreitis tuo momentu? Kokį atstumą nueis kūnas iki to momento, kai pasieks maksimalų greitį?

Nustatome kūno judėjimo greitį bet kuriuo laiko momentu:

$$v=s'=108t-t^4.$$

Randame šios funkcijos kritinius taškus:

$$v'=108-4t^3;\quad 108-4t^3=0,\quad 4t^3=108,\quad t=3.$$

Greičio antroji išvestinė:

$$v''=-12t^2, \quad v''(3)=-108<0.$$

Kai $t=3$, greitis yra maksimalus, t. y.

$$v(3)=243 \text{ (m/s)}.$$

Pagreitis $a=v'=108-4t^3$; $a(3)=108-108=0$. Nueitas atstumas $s(3)=62{,}6+54\cdot 9-0{,}2\cdot 243=500$ (m).

4. Ištirkime funkciją

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

ir nubraižykime jos grafiką.

1. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė, išskyrus $x=-1$ ir $x=1$.

2. Funkcija $f(x)$ yra nelyginė, nes jos apibrėžimo sritis simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu ir

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x).$$

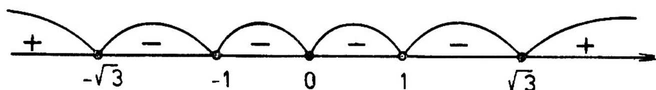
3. Funkcija neperiodinė, trūki taškuose $x=-1$ ir $x=1$.

4. Randame $f(x)$ kritinius taškus:

$$\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};$$

$$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2-3)=0, \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,\,2}=0, \\ x_{3,\,4}=\pm\sqrt{3}, \\ x\neq\pm 1. \end{cases}$$

Kritinius ir neapibrėžtumo taškus pažymime skaičių ašyje (žr. 31 pav.).



31 pav.

Intervaluose $(-\infty, -\sqrt{3}$ ir $(\sqrt{3}, +\infty)$ $f'(x)>0$, todėl juose $f(x)$ didėja. Intervaluose $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ir $(1, \sqrt{3})$ $f'(x)<0$, todėl juose $f(x)$ mažėja. Taške $x=-\sqrt{3}$ funkcija turi maksimumą, o taške $x=\sqrt{3}$ — minimumą. Taške $x=0$ $f(x)$ ekstremumo neturi, nes pereidama šį tašką išvestinė ženklo nekeičia.

5. Randame vingio taškus:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(x^2(x^2-3))'(x^2-1)^2-((x^2-1)^2)'x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(2x(x^2-3)+2x^3)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^2-3)(x^2-1)^2-4x^3(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2-1)((2x^2-3)(x^2-1)-2x^2(x^2-3))}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^4-2x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$$

$$\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ x\neq\pm1;\end{cases}\quad f(0)=0.$$

Taigi $O(0,\ 0)$ yra $f(x)$ vingio taškas.

6. Nustatome funkcijos $f(x)$ grafiko iškilumo intervalus: intervaluose $(-\infty,\ -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\ -1)$ ir $(0,\ 1)$ $f''(x)<0$, todėl juose kreivė iškila aukštyn. Intervaluose $(-1,\ 0)$, $(1,\ \sqrt{3})$ ir $(\sqrt{3},\ +\infty)$ $f''(x)>0$, todėl juose kreivė iškila žemyn.

7. Kadangi $\lim\limits_{x\to1\pm}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$ ir $\lim\limits_{x\to-1\pm}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$, tai tiesės $x=1$ ir $x=-1$ yra vertikaliosios grafiko asimptotės. Be to,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

ir

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

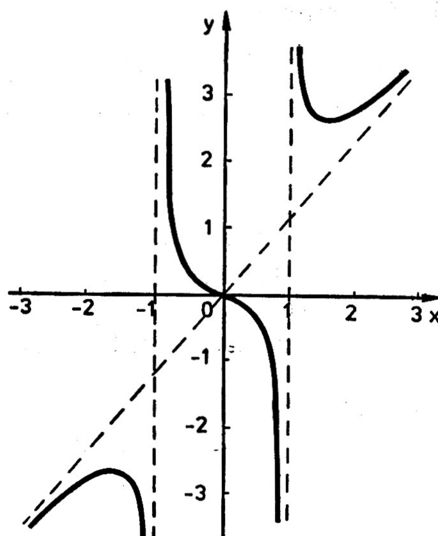
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0.$$

Pasvirosios asimptotės $y=kx+b$ koeficientai yra $k=1$, $b=0$, taigi jos lygtis — $y=x$.

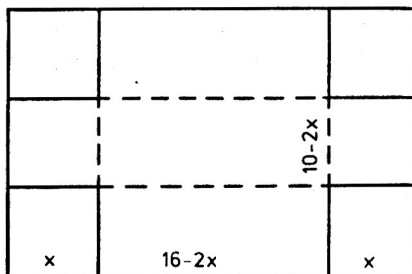
8. Apskaičiuojame funkcijos $f(x)$ grafiko susikirtimo taškus su ašimis Ox ir Oy:

$$\frac{x^3}{x^2-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=0,\\ x^2-1\neq0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ x\neq\pm1.\end{cases}$$

Grafikas eina per koordinačių pradžios tašką. Atsižvelgę į ankstesnį tyrimą, braižome funkcijos $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ grafiką (žr. 32 pav.).



32 pav.



33 pav.

4. Iš stačiakampio formos skardos lakšto, kurio kraštinės yra 16 cm ir 10 cm, išpjovus kampuose lygius kvadratėlius ir užlenkus kraštus, padaryta atvira dėžutė. Kokio ilgio turi būti išpjaunamų kvadratėlių kraštinės, kad dėžutės tūris būtų didžiausias (žr. 33 pav.).

Tarkime, kad išpjaunamo kvadratėlio kraštinės ilgis x cm. Tuomet dėžutės pagrindo kraštinių ilgiai $(16-2x)$ cm ir $(10-2x)$ cm.

Kadangi dėžutė yra stačiakampio gretasienio formos, tai jos tūris lygus

$$V=(16-2x)(10-2x)x=4(x^3-13x^2+40x) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Iš uždavinio sąlygos aišku, kad funkcija V apibrėžta intervale $(0, 5)$. Rasime šios funkcijos maksimumą nurodytame intervale:

$$V'=4(x^3-13x^2+40x)'=4(3x^2-26x+40),$$

$3x^2-26x+40=0$, $x_1=6\frac{2}{3}$, $x_2=2$. Pirmoji x reikšmė nepriklauso intervalui $(0, 5)$. Tiriame ekstremumą taške $x=2$:

$$V''=4(3x^2-26x+40)'=4(6x-26);$$

$V''_{(2)}=4(12-26)=4(-14)=-56<0$. Apskaičiavę funkcijos V maksimumą taške $x=2$, gauname $V=4(8-52+80)=4\cdot36=144$. Kad gautume didžiausio tūrio dėžutę, reikia kampuose išpjauti vienodus kvadratėlius, kurių kraštinės ilgis lygus 2 cm.

2.10. Koši* teorema

Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžios intervale $[a, b]$ - ir diferencijuojamos intervale (a, b), be to, $g(x) \neq 0$, tai tarp a ir b yra toks taškas c, kad

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Šios teoremos neįrodysime, tik pažymėsime, kad Lagranžo formulė yra atskiras Koši formulės atvejis, kai $g(x)=x$.

Pavyzdys. Patikrinsime, ar funkcijos $f(x)=x^2+4x$ ir $g(x)=$ $=x^3-x-2$ tenkina Koši teoremos sąlygas intervale $[1, 3]$. Rasime atitinkamą c reikšmę.

Abi funkcijos apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje, taigi ir intervale $[1, 3]$. Jų išvestinės $f'(x)=2x+4$ ir $g'(x)=3x^2-1$ taip pat egzistuoja, kai $x \in R$. Be to, $g(x)$ intervale $[1, 3]$ nelygi nuliui.

Taikome Koši teoremą:

$$\frac{f(3)-f(1)}{g(3)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

arba

$$\frac{21-5}{22-(-2)}=\frac{2c+4}{3c^2-1}, \ \frac{16}{24}=\frac{2c+4}{3c^2-1}, \ \frac{2}{3}=\frac{2c+4}{3c^2-1}, \ 6c^2-2=6c+12,$$

$$3c^2-3c-7=0, \ c_1=\frac{1}{6}(3-\sqrt{93}), \ c_2=\frac{1}{6}(3+\sqrt{93}).$$

c_2 reikšmė tenkina sąlygą, t. y. $c_2 \in [1, 3]$, o $c_1 \notin [1, 3]$.

2.11. Lopitalio taisyklė

Nagrinėkime santykį

$$\frac{f(x)}{g(x)};$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ — apibrėžtos ir diferencijuojamos funkcijos kokioje nors mažoje taško $x=a$ aplinkoje, išskyrus galbūt patį tašką a. Skaičiuojant

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

gali paaiškėti, kad abi funkcijos artėja prie nulio arba prie begalybės, t. y. šios funkcijos tampa arba nykstančios, arba neaprėž-

* Cauchy Augustin Louis (1789—1857) — prancūzų matematikas.

tai didėjančios. Tuo atveju sakoma, kad taške $x=a$ yra neapibrėžtumas

$$\frac{0}{0} \text{ arba } \frac{\infty}{\infty}.$$

Naudojantis išvestine ir taikant Lopitalio* taisyklę, nesunku neapibrėžtumo išvengti.

Sakykime, funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos ir diferencijuojamos kokioje nors taško a aplinkoje, išskyrus galbūt patį tašką a. Kai $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ir $g'(x)\neq 0$, tuomet, jei egzistuoja riba (baigtinė ar begalinė)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

tai egzistuoja ir riba

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Taigi teisinga lygybė

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tokiu pat būdu randama $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, kai

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \text{ ir } \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty.$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}.$$

Vietoj x įrašę skaičių -1, turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Taikome Lopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+2}{-2x+1}=-\frac{4}{3}.$$

2. Apskaičiuokime

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Vietoj x įrašę 0, gauname neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Pagal Lopitalio taisyklę

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

* G. de L'Hopitalis — prancūzų mokslininkas (1661—1704).

Šią ribą skaičiuodami gauname neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Vėl taikome Lopitalio taisyklę

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to+0} 2\sin x\cos x=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\sin 2x=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$

Iš **2** ir **3** pavyzdžių išplaukia, kad Lopitalio taisyklę galima taikyti pakartotinai: jei pirmųjų išvestinių santykis yra neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$, tai reikia imti antrųjų išvestinių santykį ir t. t.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{6}{9-x^2}-\frac{1}{x+3}\right).$

Kai $x\to-3$, abi trupmenos yra didėjančios funkcijos. Gaunamas $\infty-\infty$ tipo neapibrėžtumas. Reiškinį skliaustuose bendravardikliname ir gauname

$$\lim_{x\to-3}\frac{6-(3-x)}{9-x^2}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{9-x^2}.$$

Dabar turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Taikome Lopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{9-x^2}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{6}.$$

2.12. Funkcijos diferencialas

Imkime funkciją $y=x^2$. Argumentui x suteikus pokytį Δx, funkcija y įgis pokytį

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Daugiklis $2x$ prie Δx yra funkcijos $y=x^2$ išvestinė, todėl šiuo atveju

$$\Delta y=y'\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Matome, kad funkcijos $y=x^2$ pokytis yra dviejų dėmenų $y'\Delta x$ ir $(\Delta x)^2$ suma. Esant fiksuotai argumento x reikšmei, y' yra pastovus skaičius. Todėl, kai $\Delta x\to0$, $(\Delta x)^2$ yra nykstantis aukštesnės eilės dydis, t. y. $(\Delta x)^2$ artėja prie nulio greičiau negu $y'\Delta x$, nes $\frac{(\Delta x)^2}{y'\Delta x}=\frac{\Delta x}{y'}\to0$, kai $\Delta x\to0$, jeigu tik $y'\neq0$, t. y. $x\neq0$.

Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ yra diferencijuojama intervale (a, b) ir jo taške x, t. y.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Pritaikę ribos apibrėžimą (1 d., 4.10), galime parašyti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x);$$

čia $\alpha(x)$ — nykstanti funkcija, kai $\Delta x\to 0$. Padauginę gautosios lygybės abi puses iš Δx, gauname

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x)\Delta x.$$

Matome, kad funkcijos $y=f(x)$ pokytis Δy išreikštas dviejų dėmenų suma. Kai $\Delta x\to 0$, dėmenys $f'(x)\Delta x$ ir $\alpha(x)\Delta x$ yra nykstančios funkcijos. Dėmuo $\alpha(x)\Delta x$ yra aukštesnės eilės palyginti su $f'(x)\Delta x$ nykstanti funkcija, nes santykis $\frac{\alpha(x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}=\frac{\alpha(x)}{f'(x)}$ yra nykstanti funkcija, jeigu $f'(x)\neq 0$. Taigi dėmuo $f'(x)\Delta x$ sudaro pagrindinę pradinės funkcijos pokyčio dalį kuriame nors taške x. Ši funkcijos pokyčio dalis vadinama diferencialu ir simboliškai žymima dy. Taigi

$$dy=f'(x)\Delta x,\ \Delta y=dy+\alpha(x)\Delta x. \qquad (1)$$

Apibrėžimas. *Nepriklausomo kintamojo x pokytis Δx vadinamas jo diferencialu ir žymimas dx, t. y.*

$$\Delta x=dx.$$

Taigi funkcijos $y=f(x)$ diferencialą galime užrašyti šitaip:

$$dy=f'(x)dx.$$

Kaip matome, *funkcijos diferencialas lygus funkcijos išvestinei, padaugintai iš argumento diferencialo.*

Pavyzdžiai. 1. $y=\sin^2 x$,

$$dy=2\sin x(\sin x)'dx=2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x dx.$$

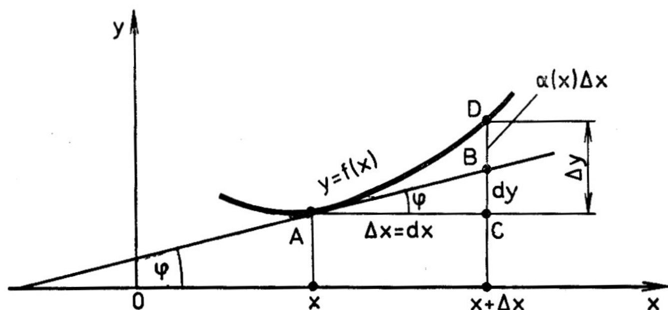
2. $y=\ln^2\sqrt{2x}$.

$$dy=2\ln\sqrt{2x}(\ln\sqrt{2x})'dx=2\ln\sqrt{2x}\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot(\sqrt{2x})'dx=$$

$$=2\ln\sqrt{2x}\frac{2}{2\sqrt{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x}}dx=2\ln\sqrt{2x}\cdot\frac{dx}{2x}=\frac{1}{x}\ln\sqrt{2x}dx.$$

3. $y=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

$$dy=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{2}}}\cdot\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)'dx=\frac{1}{\sqrt{\frac{2-x^2-2x-1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$



34 pav.

2.12.1. Funkcijos diferencialo geometrinė prasmė. Funkcijos $y=f(x)$ grafikas pavaizduotas 34 paveiksle. Per tašką A nubrėžta grafiko liestinė. Iš $\triangle\ ABC$:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi=k=f'(x),\text{ arba } dy=f'(x)\,dx \qquad (2)$$

Taigi geometriškai funkcijos diferencialas dy reiškia liestinės, išvestos kreivės taške, ordinatės pokytį. Iš (1) lygybės išplaukia, kad dy yra pagrindinė funkcijos pokyčio Δy dalis, nes, kai $\Delta x \to 0$, dydis $(\alpha(x)\Delta x)$ (atkarpa $|DB|$) nyksta žymiai greičiau negu dy (atkarpa BC). Iš (2) lygybės

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Taigi funkcijos išvestinę galima apibrėžti kaip tos funkcijos ir argumento diferencialų santykį.

2.12.2. Diferencialo taikymas apytiksliai skaičiuojant. Iš (1) lygybės

$$\Delta y=dy+\alpha(x)\Delta x.$$

Šioje lygybėje $\alpha(x)\Delta x$ yra aukštesnės eilės nykstanti funkcija palyginti su Δy ir dy, todėl ją atmetę, gauname apytikslę lygybę

$$\Delta y \approx dy.$$

Taigi skaičiuodami funkcijos pokytį, galime jį apytiksliai pakeisti funkcijos diferencialu.

Pavyzdžiai. 1. Rasime funkcijos $y=2x^3+1$ pokytį, kai $x_1=2$, $x_2=2{,}01$:

$$dx=\Delta x=2{,}01-2=0{,}01;$$

$$dy=(2x^3+1)'dx=6x^2dx;\quad dy=6\cdot 4\cdot 0{,}01=0{,}24.$$

Taigi $\Delta y \approx 0{,}24$.

2. Geležinis rutulys tiek įkaitintas, kad jo spindulys $R=20$ cm padidėjo 0,01 cm. Apskaičiuosime rutulio tūrio pokytį.

Rutulio tūris skaičiuojamas pagal formulę

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ieškome $\Delta V\approx dV$. Rutulio tūris yra spindulio R funkcija, todėl

$$dV=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'dR=\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2dR,$$
$$dV=4\pi R^2dR=4\pi 400\cdot 0{,}01=16\pi.$$

Ats. $\Delta V\approx 16\pi$ (cm³).

3. Raskime funkcijos $y=2x^3-3x+5$ reikšmę, kai $x=3{,}001$.

Funkcijos pokyčio formulėje $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ Δy pakeitę dy gauname

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy.$$

Šią lygybę taikome mūsų uždaviniui:

$$f(3{,}001)=f(3)+dy;\ f(3)=2\cdot 27-9+5=54-4=50;$$
$$dy=(6x^2-3)dx=(6\cdot 9-3)\cdot 0{,}001=51\cdot 0{,}001=0{,}051.$$

Taigi $f(3{,}001)=50+0{,}051=50{,}051$.

2.13. Uždaviniai ir pratimai

1. Raskite kreivės $y=x^2-4x+3$ liestinės krypties koeficientą taške, kurio abscisė lygi 4.

2. Parašykite kreivės $xy=2$ liestinės lygtį taške, kurio abscisė $x=2$.

3. Nubrėžta kreivės $y=x^2-6x+5$ liestinė, lygiagreti ašiai Ox. Raskite lietimosi taško koordinates.

4. Per kurį kreivės $y=x^2-2x-8$ tašką reikia brėžti liestinę, kad ji būtų lygiagreti tiesei $3x-2y-6=0$?

5. Per kreivės $y=x^2+2x-3$ susikirtimo su ašimi Ox taškus nubrėžtos kreivės liestinės. Raskite šių liestinių susikirtimo tašką.

6. Užrašykite lygtis kreivės $y=x^3+x^2-2x+1$ liestinių, kurios su ašimi Ox sudaro 135° kampą.

7. Užrašykite lygtis kreivės $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{2}{3}$ liestinių, kurios lygiagrečios ašiai Ox.

8. Per kuriuos kreivės $y=x^3-2x+1$ taškus reikia brėžti liestines, kad jos būtų lygiagrečios tiesei $y-x+5=0$?

9. Per tašką $(-1, 4)$ nubrėžta kreivės $y=x^3-2x+3$ liestinė. Užrašykite šios liestinės ir normalės lygtis.

10. Nubrėžta kreivės $y=x^2+x-4$ liestinė, lygiagreti tiesei $y+5x-2=0$. Užrašykite jos lygtį.

11. Materialusis taškas juda pagal dėsnį $s=2t^2-3t+1$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis). Apskaičiuokite judėjimo greitį momentu $t=5$ s.

12. Materialusis taškas juda pagal dėsnį $s=2t^3-3t^2+t-2$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis). Apskaičiuokite greitį ir pagreitį momentu $t=2$ s.

13. Kūnas juda pagal dėsnį $s=3t^2-15t+2$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis). Kokiu laiko momentu šio kūno greitis lygus nuliui?

14. Kokiu laiko momentu kūno, judančio pagal dėsnį $s=5t^2-3t+4$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis) greitis bus 27 m/s?

15. Kūnas juda pagal dėsnį $s=\frac{2}{t}+3t^2$. Raskite jo greitį ir pagreitį laiko momentu t?

16. Kūnas sukasi apie ašį. Kampo φ kitimas priklauso nuo laiko t ir užrašomas formule $\varphi=0{,}1t^2+0{,}5t-0{,}1$. Raskite kūno sukimosi greitį laiko momentu $t=10$ s.

17. Nubraižykite kūno, judančio pagal dėsnį

$$s(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3}t^3+7t, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ -0{,}5t^2+5t+\frac{10}{3}, & 2\leqslant t\leqslant 5,\end{cases}$$

greičio grafiką.

18. Nubraižykite kūno, judančio pagal dėsnį

$$s(t)=\begin{cases} 0{,}2t^2+2t-3, & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ \frac{1}{3}t^3-7t^2+49t-\frac{299}{3}, & 5\leqslant t\leqslant 10,\end{cases}$$

greičio grafiką.

19. Nubraižykite kūno, judančio pagal dėsnį

$$s(t)=\begin{cases} \frac{1}{3}t^3-8, & |t|\leqslant 2,\\ 4t-3, & |t|>2,\end{cases}$$

greičio grafiką.

20. Materialusis taškas juda pagal dėsnį $s=6t^2-t^3$; čia s matuojamas metrais, t — sekundėmis. Kuriuo laiko momentu greitis bus didžiausias? Raskite tą greitį.

21. Kiek laiko kils į viršų kūnas, išmestas vertikaliai pradiniu greičiu $v_0=98$ m/s, jeigu jo atstumas nuo žemės paviršiaus išreiškiamas lygtimi $s=v_0t-\frac{gt^2}{2}$; čia $g=9{,}8$ m/s^2. Oro pasipriešinimo nepaisykite.

22. Kūnas juda pagal dėsnį $s=0{,}5\sin 2t$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis). Raskite kūno judėjimo pagreitį laiko momentu $t=\frac{\pi}{4}$.

23. Kūnas juda pagal dėsnį $s=\frac{1}{18}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+1$ (s matuojamas metrais, t — sekundėmis). Nubraižykite judėjimo pagreičio kitimo grafiką. Apskaičiuokite minėtą pagreitį, kai $t=6$ s.

24. Kūnas juda pagal dėsnį $s(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$, A, ω, φ — pastovūs dydžiai. Raskite pagreičio formulę bet kuriuo laiko momentu t.

25. Iš stačiakampio formos kartono lapo (32×20 cm^2), kampuose išpjovus vienodo dydžio kvadratus, pagaminta didžiausio tūrio dėžutė be dangčio. Raskite tos dėžutės tūrį.

26. Nubraižykite didžiausio ploto stačiakampį, jeigu jo perimetras yra 16 cm.

27. Kvadratinio skardos lakšto, kurio kraštinės ilgis lygus 60 cm, kampuose reikia taip išpjauti 4 kvadratus, kad būtų galima pagaminti didžiausio tūrio dėžutę. Raskite išpjaunamų kvadratų kraštinės ilgį.

28. Trikampio pagrindo ir aukštinės ilgių suma lygi 10 cm. Kokio ilgio turi būti pagrindas, kad trikampio plotas būtų didžiausias?

29. Iš stačiakampio formos kartono lapo (30×48 cm^2) kampuose išpjovus vienodo dydžio kvadratus ir kraštus atitinkamai užlenkus, pagaminta didžiausio tūrio dėžutė be dangčio. Apskaičiuokite išpjautų kvadratų kraštinės ilgį.

30. Trikampio pagrindo ilgis — 10 cm, o aukštinės — 6 cm. Raskite įbrėžto į tą trikampį didžiausio ploto stačiakampio aukštinės ilgį.

31. Reikia pagaminti 108 cm^3 stačiakampio gretasienio formos dėžutę be dangčio; be to, jos pagrindas turi būti kvadrato formos. Kokie turi būti dėžutės matmenys, kad jai pagaminti būtų sunaudota mažiausiai medžiagos?

32. Ištirkite funkcijas ir nubraižykite jų grafikus:

1) $y=x^2+x$; 2) $y=1-x^2$;

3) $y=x^3+1$; 4) $y=x^3-3x+3$;

5) $y=x^3-12x^2+36x$; 6) $y=x^3+x^2-8x$;

7) $y=2x^2-\frac{4}{3}x^3$; 8) $y=-x^3-4x^2+3x+8$;

9) $y=\frac{1}{3}x^3-x+3$; 10) $y=\frac{1}{6}x^3-x$;

11) $y=x^2-2x^3$; 12) $y=\frac{1}{3}x^3-x$;

13) $y=-\frac{1}{6}x^3+2x$; 14) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$;

15) $y=-\frac{1}{3}x^3+9x$; 16) $y=3x-x^3$;

17) $y=x^3-3x+1$; 18) $y=x^3-12x$;

19) $y=-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+x$; 20) $y=3x^2-x^3$;

21) $y=x^3-9x$; 22) $y=x^3-3x^2+2$;

23) $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2$; 24) $y=3x^4-4x^3$;

25) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$; 26) $y=x^4-5x^2+4$;

27) $y=-\frac{1}{2}x^4-x^3-x^2+7$; 28) $y=x^4-6x^2+5$;

29) $y=x^4-2x^3-2x^2$; 30) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$;

31) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 32) $y=\frac{1}{1+x^2}$;

33) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

34) $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

35) $y=e^x$;

36) $y=e^{-x^2}$;

37) $y=\ln x$.

33. Raskite funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmes nurodytame intervale:

1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$, $[0, 3]$;

2) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[-2, 1]$;

3) $f(x)=x^5-x^3+x+2$, $[-1, 1]$;

4) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\sin x$, $[0, \pi]$;

5) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

6) $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, $[1, 6]$.

34. Raskite funkcijos $y=\sqrt{x(10-x)}$ didžiausią ir mažiausią reikšmes.

35. Raskite funkcijų asimptotes ir nubraižykite jų grafikus:

1) $y=\frac{3}{x^2-4}$;

2) $y=\frac{x-2}{x+4}$;

3) $y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$;

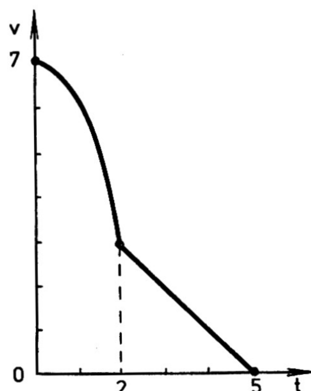
4) $y=\frac{x^2+1}{2x+3}$;

5) $y=\frac{2x^2-1}{x}$;

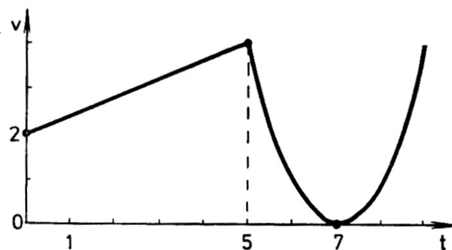
6) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

2.9. Atsakymai

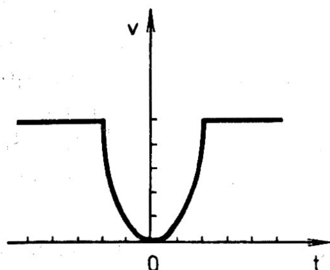
1. 4. **2.** $x+2y-4=0$. **3.** $(3, -4)$. **4.** $\left(\frac{7}{4}, -5\frac{3}{8}\right)$. **5.** $(-1, -8)$. **6.** $x+y-2=0$; $27x+27y-22=0$. **7.** $y+\frac{2}{3}=0$, $y+2=0$. **8.** $(-1, 2)$; $(1; 0)$. **9.** $y-x-5=0$; $x+y-3=0$. **10.** $5x+y+13=0$. **11.** 17 m/s. **12.** $v=13$ m/s; $a=18$ m/s^2.



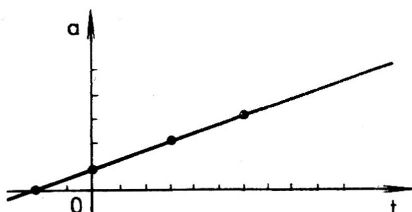
35 pav.



36 pav.



37 pav.



38 pav.

13. 2,5 s. **14.** 3 s. **15.** $v=6t-\frac{2}{t^2}$; $a=6+\frac{4}{t^3}$. **16.** $\varphi=2{,}5$. **17.** Žr. 35 pav. **18.** 36 pav. **19.** Žr. 37 pav. **20.** $t=2$ s; $v=16$ m/s. **21.** 10 s. **22.** -2. **23.** Žr. 38 pav., $a(6)=3$. **24.** $-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$. **25.** 512 cm³. **26.** Kvadratas. **27.** 10 cm. **28.** 5 cm. **29.** 6 cm. **30.** 3 cm. **31.** $6\times6\times3$ cm³. **33.** 1) 6, -3; 2) 17, 0; 3) 3, 1; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 0; 5) 0,5, 0,75; 6) $2\frac{1}{8}$, 1. **34.** 5, 0. **35.** 1) $x=-2$, $x=2$; 2) $x=-4$, $y=1$; 3) $x=3$, $y=x-3$; 4) $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$; 5) $x=0$, $y=2x$; 6) $x=-2$, $x=2$, $y=x$.

3. NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

3.1. Neapibrėžtinio integralo sąvoka

Sprendžiant kai kuriuos geometrijos, mechanikos, fizikos ir technikos uždavinius, tenka atlikti atvirkštinį veiksmą diferencijavimui — integravimą. Integravimo veiksmu ieškome funkcijos $F(x)$, žinodami jos išvestinę $f(x)$ arba diferencialą $f(x)dx$. Funkcija $F(x)$ vadinama pirmykšte funkcija.

Funkcijos $f(x)$ *pirmykšte* vadinama tokia funkcija $F(x)$, kai $F'(x)=f(x)$ arba $dF(x)=f(x)dx$.

Pavyzdžiui, funkcija $F(x)=x^2$ yra funkcijos $f(x)=2x$ pirmykštė funkcija, nes $(x^2)'=2x$.

Jeigu $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai $F(x)+C$, $C\in R$, irgi yra tos pačios funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, nes

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Pavyzdžiui, jeigu $f(x)=3x^2$, tai $F_1(x)=x^3$, $F_2(x)=x^3+1$, $F_3(x)=x^3-5$ ir t. t. Apskritai, jeigu $f(x)=3x^2$, tai $F(x)=x^3+C$.

Jeigu funkcijos $F(x)$ ir $G(x)$ intervale (a, b) yra funkcijos $f(x)$, pirmykštės funkcijos, tai jos viena nuo kitos skiriasi tik konstanta. Iš tikrųjų, jei $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$, tai $(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$. Vadinasi, $F(x)-G(x)=C$.

Funkcijos $f(x)$ visų pirmykščių funkcijų $F(x)+C$ aibė vadinama šios *funkcijos neapibrėžtiniu integralu*. Funkcijos $f(x)$ neapibrėžtinį integralą simboliškai žymėsime

$$\int f(x)\,dx.$$

Taigi

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C;$$

čia $f(x)$ — pointegralinė funkcija, $f(x)\,dx$ — pointegralinis reiškinys, C — integravimo konstanta.

3.1.1. Pagrindinės neapibrėžtinio integralo savybės

1. Neapibrėžtinio integralo išvestinė lygi pointegralinei funkcijai. Iš tikrųjų

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

2. Neapibrėžtinio integralo diferencialas lygus pointegraliniam reiškiniui. Tuo nesunku įsitikinti:

$$d\int f(x)\,dx=\left(\int f(x)\,dx\right)'dx=f(x)\,dx.$$

3. Funkcijos diferencialo neapibrėžtinis integralas lygus diferencijuojamai funkcijai, sudėtai su bet kuria konstanta, t. y.

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

4. Pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą:

$$\int Cf(x)\,dx=C\int f(x)\,dx.$$

Šią lygybę nesunku įrodyti abi jos puses diferencijuojant.

5. Kelių funkcijų algebrinės sumos integralas lygus tų funkcijų integralų algebrinei sumai, t. y.

$$\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx-\int f_3(x)\,dx.$$

Ši lygybė galioja imant bet kurią baigtinio skaičiaus funkcijų algebrinę sumą.

Remdamiesi integralo apibrėžimu, sudarome pagrindinių integravimo formulių lentelę:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

Norėdami įsitikinti, ar ši formulė teisinga, imkime jos dešiniosios pusės diferencialą:

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right)' dx =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}(n+1) x^{n+1-1}\right) dx = x^n dx.$$

Gavome integralo $\int x^n dx$ pointegralinį reiškinį. Tai rodo, kad užrašytoji formulė yra teisinga.

Toliau pateiktų integravimo formulių teisingumu nesunku įsitikinti diferencijuojant abi lygybės puses.

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$

11. $\int e^x dx = e^x + C.$

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

13. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

19. $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

20. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$

3.1.2. Funkcijų integravimas. Naudodamiesi užrašytomis formulėmis, išspręskime keletą pavyzdžių.

1. $\int 3x^2dx=3\int x^2dx=3\frac{x^3}{3}+C=x^3+C.$

2. $\int \sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.$

3. $\int \frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=-\frac{x^{-2}}{2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C.$

4. $\int (2x+1)^2dx=\int (4x^2+4x+1)\,dx=\int 4x^2dx+\int 4xdx+\int dx=$
$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C.$

5. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}\,dx=\int\left(\frac{2\sqrt[3]{x}}{x^2}-3\right)dx=2\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx-3\int dx=$
$=2\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}-3x+C=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-3x+C.$

6. $\int \frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}\,dx=\int (e^x+\sin x)\,dx=e^x-\cos x+C.$

7. $\int\left(5x^4-\frac{8}{\cos^2 x}+3\sqrt{x}+1\right)dx=5\int x^4dx-8\int\frac{dx}{\cos^2 x}+3\int x^{\frac{1}{2}}dx+$
$+\int dx=x^5-8\operatorname{tg} x+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+x+C=x^5-8\operatorname{tg} x+2x\sqrt{x}+x+C.$

8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$
$=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$

9. $\int 2^x3^{2x}dx=\int 2^x9^xdx=\int 18^xdx=\frac{18^x}{\ln 18}+C.$

10. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=$
$=\int x^{-2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C.$

11. $\int \operatorname{tg}^2 xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg} x-x+C.$

3.2. Pirmykštės funkcijos radimas remiantis pradinėmis sąlygomis

Žinome, kad funkcijos $f(x)$ neapibrėžtinis integralas yra aibė pirmykščių funkcijų $F(x)+C$, t. y.

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Atskiros pirmykštės funkcijos skiriasi viena nuo kitos integravimo konstantos C reikšme. Sprendžiant įvairius uždavinius, dažnai reikia rasti funkcijos $f(x)$ vieną kurią nors pirmykštę funkciją, tenkinančią tam tikras pradines sąlygas. Remiantis tomis sąlygomis, galima nustatyti integravimo konstantą C ir tuo būdu išskirti norimą pirmykštę funkciją. Pavyzdžiui, jeigu pirmykštė funkcija $F(x)+C$ turi būti lygi b, kai $x=a$, tai

$$F(a)+C=b.$$

Vadinasi, $C=b-F(a)$, ir ieškomoji pirmykštė funkcija yra

$$F(x)-F(a)+b.$$

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $f(x)=x^2+1$ pirmykštę funkciją, kuri įgyja reikšmę $2\frac{1}{3}$, kai $x=1$.

Pirmiausia randame visą aibę pirmykščių funkcijų:

$$\int (x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x+C.$$

Iš gautos pirmykščių funkcijų aibės turime išskirti tą, kuri tenkina pradines sąlygas:

$$\frac{1}{3}+1+C=2\frac{1}{3},\quad C=1.$$

Vadinasi, ieškomoji pirmykštė funkcija yra

$$\frac{1}{3}x^3+x+1.$$

2. Beorėje erdvėje laisvai krinta kūnas pagal dėsnį $v=gt$. Raskime judėjimo dėsnį, t. y. išreikškime nueitą atstumą s kaip laiko t funkciją, jei kūnas iki laiko atskaitos pradžios buvo nuėjęs 7 m atstumą.

Žinome, kad greitis yra kelio išvestinė, t. y. $s'=v=gt$. Taigi nueitas atstumas (kelias) išreiškiamas kaip greičio $v=gt$ neapibrėžtinis integralas:

$$s=\int gt\,dt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2+C.$$

Kadangi nueitas atstumas skaičiuojamas nuo to momento, kai s buvo 7 m, tai pradinės sąlygos šitokios: $t=0$, $s=7$. Randame integravimo konstantą ir pačią pirmykštę funkciją:

$$7=\frac{1}{2}g\cdot 0+C,\quad C=7,$$

$$s=\frac{1}{2}gt^2+7.$$

3.3. Integravimas keičiant kintamąjį

Be pagrindinių integravimo formulių, sudėtinės funkcijos integruojamos taikant kintamojo keitimo metodą. Jis pagrįstas šia teorema:

Jei $\int g(z)\,dz = G(z) + C$, tai

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C. \qquad (1)$$

Matome, kad $G'(z) = g(z)$, todėl telieka įsitikinti, kad (1) lygybės dešinėje pusėje esančios sudėtinės funkcijos $G(\varphi(x))$ išvestinė, lygi

$$(G(\varphi(x)))' = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Ji sutampa su pointegraline funkcija. Taigi mūsų samprotavimas yra teisingas ir

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int g(z)\,dz, \text{ kai } z = \varphi(x).$$

Priminsime, kad $\varphi(x)$ turi būti diferencijuojama funkcija.

Pavyzdžiai. Integruosime taikydami kintamojo keitimo metodą.

1. $\int (2x+1)^4 dx.$

Pažymėję $2x+1=z$, randame $dx = \frac{1}{2}dz$. Rastąją dx reikšmę įrašę į sąlygą, gauname

$$\int z^4 \cdot \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\int z^4 dz = \frac{1}{10}z^5 + C.$$

Vietoj z įrašę $2x+1$, turime

$$\int (2x-1)^4 dx = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C.$$

2. Raskime integralą $\int \sin^2 x \cos x\,dx.$

Pakeitę $\sin x = z$, gauname

$$d \sin x = dz,$$
$$\cos x\,dx = dz.$$

Atsižvelgę į gautąją lygybę, pradinį integralą perrašome šitaip:

$$\int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C.$$

Kadangi $z = \sin x$, tai

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

3. Apskaičiuokime $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$

Pažymime $x^2+1=z$ ir gauname $2xdx=dz$, arba $xdx=\frac{1}{2}dz$. Šiuos keitinius įrašę į pradinį integralą, turime

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C.$$

4. Raskime $\int \cos 4xdx$.

Įvedame naują kintamąjį $4x=z$. Tada $4dx=dz$ ir $dx=\frac{1}{4}dz$. Taigi

$$\int \cos 4xdx=\frac{1}{4}\int \cos zdz=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

5. $\int \operatorname{ctg} xdx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$

Jeigu $\sin x=z$, tai $\cos xdx=dz$ ir $\int \operatorname{ctg} xdx=\int \frac{dz}{z}=\ln|z|+C=$ $=\ln|\sin x|+C.$

6. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^4 x}.$

Šiam integralui tinka keitinys $\cos x=z$, nes $\sin xdx=-dz$ ir

$$\int \frac{\sin xdx}{\cos^4 x}=-\int \frac{dz}{z^4}=-\int z^{-4}dz=-\frac{z^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3z^3}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}+C.$$

7. $\int \frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}.$

Pakeitę $1+2\sin x=z$, gauname $2\cos xdx=dz$ ir $\cos xdx=\frac{1}{2}dz$. Gautąją išraišką ir keitinį įrašę į pradinį integralą, gauname

$$\int \frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{3}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\cdot 2z^{\frac{1}{2}}+C=$$
$$=3\sqrt{1+2\sin x}+C.$$

8. $\int \frac{2\ln xdx}{x}.$

Pažymėję $\ln x=z$, turime $\frac{dx}{x}=dz$, ir $\int \frac{2\ln xdx}{x}=2\int zdz=$ $=z^2+C=\ln^2 x+C.$

9. $\int xe^{x^2-1}dx.$

Tarkime, kad $x^2-1=z$, tada $2xdx=dz$ ir $xdx=\frac{1}{2}dz$. Taigi

$$\int xe^{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int e^z dz=\frac{1}{2}e^z+C=\frac{1}{2}e^{x^2-1}+C.$$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}.$

Pažymėję $3x=z$, gauname $3dx=dz$ ir $dx=\frac{1}{3}dz$. Taigi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3} \arcsin z + C = \frac{1}{3} \arcsin 3x + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16\left(1-\frac{9x^2}{16}\right)}} = \int \frac{dx}{4\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}x\right)^2}} =$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}x\right)^2}}.$$

Pažymėję $\frac{3}{4}x = z$, gauname $\frac{3}{4}dx = dz$ ir $dx = \frac{4}{3}dz$. Šiuos keitinius įrašę į pradinį integralą, turime

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3} \arcsin z + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4}x + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+16x^2} = \int \frac{dx}{1+(4x)^2}.$

Jeigu $4x = z$, tai $4dx = dz$ ir $dx = \frac{1}{4}dz$. Taigi

$$\int \frac{dx}{1+16x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} 4x + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}.$

Pakeitę $x^2+1 = z$, turime $2xdx = dz$ ir $xdx = \frac{1}{2}dz$. Taigi

$$\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(x^2+1) + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{4+\cos^2 x}}.$

Tarkime, kad $\cos x = z$, tuomet $-\sin x dx = dz$ ir $\sin x dx = -dz$. Taigi

$$\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{4+\cos^2 x}} = -2 \int \frac{dz}{\sqrt{2^2+z^2}} = -2 \ln\left|z+\sqrt{4+z^2}\right| + C =$$

$$= -2 \ln\left|\cos x + \sqrt{4+\cos^2 x}\right| + C.$$

15. $\displaystyle\int \cos^2 x dx.$

Iš trigonometrijos žinome, kad $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Pakeitę pradinį integralą, gauname

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

16. $\displaystyle\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

Tarkime, kad $z = \arcsin x$. Tuomet $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Taigi

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int z^2 dz + C = \frac{1}{3} z^3 + C = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C.$$

17. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \ a > 0.$

Pakeičiame: $x = a \sin z$, $|z| \leqslant \frac{\pi}{2}$; tada $dx = a \cos z dz$ ir

$$z = \arcsin \frac{x}{a}; \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z.$$

Taigi

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos z \cdot a \cos z dz = a^2 \int \cos^2 z dz.$$

Remdamiesi 15 pavyzdžiu, rašome

$$a^2 \int \cos^2 z dz = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \frac{a^2}{2}\left(z + \frac{1}{2} \sin 2z\right) + C.$$

Kadangi $\sin 2z = 2 \sin z \cos z = 2 \sin z \sqrt{1 - \sin^2 z} = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} =$
$= 2 \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$, tai

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

3.4. Paprasčiausių racionaliųjų funkcijų integravimas

Funkcija vadinama racionaliąja, jeigu ji užrašoma dviejų daugianarių santykiu.

Išnagrinėkime dažnai pasitaikantį integralą

$$\int \frac{P(x)}{x^2 + px + q} dx;$$

čia $P(x)$ — daugianaris, p ir q — koeficientai. Padaliję skaitiklį $P(x)$ iš vardiklio $x^2 + px + q$, gauname tam tikrą daugianarį $Q(x)$ ir liekaną — tiesinį dvinarį $mx + n$, nes liekanos laipsnis yra mažesnis už dalikio laipsnį:

$$\frac{P(x)}{x^2 + px + q} = Q(x) + \frac{mx + n}{x^2 + px + q}.$$

Daugianario $Q(x)$ integralas randamas pagal integravimo taisykles. Aptarkime integralą

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx.$$

Jeigu trinario x^2+px+q šaknys x_1 ir x_2 yra realios ir skirtingos, tai galima rasti tokius skaičius A ir B, kad būtų

$$\frac{mx+n}{x^2+px+q}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}.$$

(Tos lygybės čia neįrodinėsime.) Šioje lygybėje skaičiai A ir B vadinami neapibrėžtaisiais koeficientais. Taigi

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A}{x-x_1}dx+\int\frac{B}{x-x_2}dx=$$
$$=A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_2|+C.$$

Norėdami rasti koeficientus A ir B, sudedame trupmenas $\frac{A}{x-x_1}$ ir $\frac{B}{x-x_2}$:

$$\frac{mx+n}{x^2+px+q}=\frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Trupmenų vardikliai vienodi, nes $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$. Todėl reikalaukime, kad sutaptų ir skaitikliai:

$$mx+n\equiv A(x-x_2)+B(x-x_1),$$
$$mx+n\equiv(A+B)x-Ax_2-Bx_1.$$

Sulyginę koeficientus prie x ir laisvuosius narius, esančius skirtingose tapatybės pusėse, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+B=m, \\ -Ax_2-Bx_1=n, \end{cases}$$

iš kurios randame A ir B.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$.

Kvadratinis trinaris x^2-5x+6 turi realias skirtingas šaknis $x_1=2$, $x_2=3$. Randame tokius koeficientus A ir B, kad galiotų tapatybė:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

arba

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Kadangi abiejose tapatybės pusėse vardikliai yra vienodi, tai

$$x+3\equiv A(x-3)+B(x-2),$$
$$x+3\equiv Ax-3A+Bx-2B\equiv(A+B)x-3A-2B.$$

Koeficientai prie x ir laisvieji nariai turi būti atitinkamai lygūs.

Taigi

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B=2, \\ -3A-2B=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-5, \\ B=6. \end{cases}$$

Vadinasi,

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} \equiv -\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3},$$

todėl

$$\int \frac{(x+3)dx}{x^2-5x+6} = -5\int \frac{dx}{x-2}+6\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= -5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C=\ln\frac{(x-3)^6}{|x-2|^5}+C.$$

Išspręskime pavyzdžių, kai trinaris x^2+px+q realiųjų šaknų neturi.

2. $$\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{dx}{x^2-10x+25-25+16} = \int \frac{dx}{(x-5)^2-9}.$$

Pažymime $x-5=z$, tuomet $dx=dz$. Taigi

$$\int \frac{dx}{x^2-10x+16} = \int \frac{dz}{z^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{z-3}{z+3}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5-3}{x-5+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+C.$$

3. $$\int \frac{dx}{x^2+6x+12} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+3} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+3} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Jeigu $x+3=z$, tai $dx=dz$ ir

$$\int \frac{dx}{(x+3)^2+(\sqrt{3})^2} = \int \frac{dz}{z^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C.$$

4. $$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx = \int \frac{3x+1}{x^2-4x+4+8}dx = \int \frac{3x+1}{(x-2)^2+8}.$$

Pažymime $x-2=z$. Tuomet $dx=dz$ ir $x=z+2$. Taigi

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx = \int \frac{3(z+2)+1}{z^2+8}dz = \int \frac{3z+7}{z^2+8}dz = 3\int \frac{zdz}{z^2+8}+7\int \frac{dz}{z^2+8}.$$

Pirmąjį integralą skaičiuojame kintamųjų keitimo metodu: $z^2+8=t$ ir $2zdz=dt$, $zdz=\frac{1}{2}dt$. Taigi

$$3\int \frac{zdz}{z^2+8} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln t+C = \frac{3}{2}\ln(z^2+8)+C.$$

Ieškodami dviejų integralų sumos, rašysime tik vieną konstantą C. Vadinasi,

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12}dx=\frac{3}{2}\ln(z^2+8)+7\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{8}}+C=$$
$$=\frac{3}{2}\ln((x-2)^2+8)+\frac{7}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+C=$$
$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+12)+\frac{7}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+C.$$

5. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx.$

Taikome „dalybos kampu“ algoritmą:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 & x^2+1 \\ \underline{x^4+x^2} & \overline{x^2-1} \\ -\,-x^2 & \\ \underline{-x^2-1} & \\ 1 & \end{array}$$

Taigi $\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$ ir

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx=\int x^2dx-\int dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$$

3.5. Trigonometrinių reiškinių integravimas

1. Apskaičiuokime $\int \cos^4 x dx.$

$$\int \cos^4 x dx=\int (\cos^2 x)^2 dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx.$$

Pakeitę $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$, gauname

$$\int \cos^4 x dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

2. Apskaičiuokime $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\cdot \operatorname{tg}^2 x dx=\int \operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\, dx}{\cos^2 x}-\int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

Randame pirmąjį integralą. Pažymėję $\operatorname{tg} x=u$, turime $\frac{dx}{\cos^2 x}=du.$ Taigi

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{\cos^2 x}=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$$

Skaičiuojame integralą $\int \operatorname{tg}^2 x dx$:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

3. Raskime $\int \sin^3 x dx$.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx.$$

Apskaičiuojame integralą $\int \cos^2 x \sin x dx$. Pažymėję $\cos x = u$, gauname $-\sin x dx = du$. Taigi

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Integralas $\int \sin^3 x dx$ užrašomas šitaip:

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Jeigu m ir n — nelygūs nuliui skaičiai, tai integralai

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

ir

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

integruojami taikant šias formules:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin (m+n) x + \sin (m-n) x),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos (m+n) x + \cos (m-n) x),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos (m-n) x - \cos (m+n) x).$$

Pavyzdžiai. **4.** $\int \sin 7x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 10x) dx =$
$= \frac{1}{2} \int \sin 4x dx + \frac{1}{2} \int \sin 10x dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{20} \cos 10x + C.$

5. $\int \sin 3x \sin x dx$.

$$\int \sin 3x \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

6. $\int \cos 5x \cos 3x dx$.

$$\int \cos 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 8x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

Praktiniuose taikymuose tenka integruoti

$$\int \sin^m x \cos^n x dx;$$

čia m ir n — sveikieji neneigiami skaičiai. Išskirsime du atvejus:

1) bent vienas iš rodiklių m ir n yra nelyginis skaičius;
2) abu rodikliai m ir n yra lyginiai skaičiai.

Pavyzdžiai. **7.** $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) \cos^2 x \times$ $\times d(\cos x) = -\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x +$ $+\frac{1}{5}\cos^5 x + C$.

8. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x dx$. Kadangi $\sin^2 x \cos^2 x =$ $= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$ ir $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, tai $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \times$ $\times \int \sin^2 2x (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$ $= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx +$ $+ \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

3.6. Paprasčiausių iracionaliųjų funkcijų integravimas

Jeigu pointegralinė funkcija yra racionali x ir $\sqrt[n]{ax+b}$ atžvilgiu, tai patogu atlikti keitinį: $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime integralą $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}}$. Paėmę $t = \sqrt[3]{2x+1}$, turime $2x = t^3 - 1$, arba $x = \frac{1}{2}(t^3-1)$, ir $dx = \frac{3}{2}t^2 dt$. Taigi

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}(t^3-1)\cdot\frac{3}{2}t^2 dt}{t} = \frac{3}{4}\int \frac{(t^5-t^2)dt}{t} = \frac{3}{4}\int (t^4-t)dt =$$
$$= \frac{3}{20}t^5 - \frac{3}{8}t^2 + C = \frac{3}{20}\sqrt{(2x+1)^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^2} + C.$$

2. Apskaičiuokime $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} dx$.

Keičiame $t = \sqrt{4x+1}$, tuomet $t^2 = 4x+1$, $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}$, $dx =$ $= \frac{1}{2}t dt$. Taigi

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} = \int \frac{\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4} + 5}{t} \cdot \frac{1}{2} t dt = \int \left(\frac{3}{8} t^2 + \frac{17}{8}\right) dt = \frac{1}{8} t^3 + \frac{17}{8} t + C =$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{4x+1}\,(4x+18) + C = \frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{4x+1} + C.$$

Apskaičiuokime integralą

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Kai trinaris ax^2+bx+c nėra dvinario kvadratas, galime išskirti pilnąjį kvadratą ir užrašyti šitaip:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Kai $a>0$, įvedę atitinkamą keitinį, remsimės formule, pateikta pagrindinių integralų lentelėje:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha^2}| + C.$$

Analogiškai, kai $a<0$ ir $4ac-b^2<0$, taikysime formulę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha} + C.$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$.

Pertvarkę vardiklį, turime:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4-4+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-2}}.$$

Pakeitę $x-2=t$, $dx=dt$, gauname

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \ln|t+\sqrt{t^2-2}| + C =$$

$$= \ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+2}| + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x-4+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}.$$

Pakeitę $x-2=t$, $dx=dt$, turime

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Vardiklyje esančias šaknis užrašome šitaip:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}.$$

Jei $t=\sqrt[6]{x}$, tuomet $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Taigi

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}.$$

Išskyrę dalmens $\frac{t^3}{t+1}$ sveikąją dalį, integruojame:

$$6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C.$$

Galutinai gauname

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

4. $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$.

Pakeitę $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, gauname

$$t^2=\frac{1+x}{1-x},\quad 1-x=\frac{2}{t^2+1},\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Taigi

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2t-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

3.7. Dalinis integravimas

Tarkime, kad funkcijos $u=f(x)$ ir $v=g(x)$ kuriame nors intervale turi išvestines $u'=f'(x)$ ir $v'=g'(x)$. Tuomet sandauga $u\cdot v$ tame intervale irgi turi išvestinę. Be to,

$$d(uv)=u'vdx+uv'dx.$$

Šios lygybės abi puses integruojame:

$$\int d(uv)=\int u'vdx+\int uv'dx,$$

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv,$$

$$uv=\int vdu+\int udv,$$

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu.}$$

Gautoji lygybė vadinama *dalinio integravimo formule.*

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime $\int xe^x dx$. Tarkime, kad $u=x$, o $dv=e^x dx$, tuomet $du=dx$ ir $v=e^x$. Taigi

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. Raskime $\int x \sin x dx$. Tarkime, kad $u=x$, $dv=\sin x dx$, tada $du=dx$ ir $v=-\cos x$. Taigi

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3. $\int (2x-3) e^{3x} dx$. Jeigu $u=2x-3$ ir $dv=e^{3x}dx$, tai $du=2dx$ ir $v=\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Taigi

$$\int (2x-3) e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}(2x-3) - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x}(2x-3) - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x - \frac{11}{3}\right) + C.$$

Čia integralas $\int e^{3x}dx$ randamas pažymėjus $3x=z$.

4. $\int \ln x dx$. Jeigu $u=\ln x$ ir $dv=dx$, tai $du=\frac{dx}{x}$ ir $v=x$. Taigi

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

5. $\int x^2 \ln x dx$. Tarkime, kad $u=\ln x$ ir $dv=x^2 dx$, tada $du=\frac{dx}{x}$ ir $v=\frac{1}{3}x^3$. Taigi

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

6. $\int \operatorname{arctg} x dx$. Tarkime, kad $u=\operatorname{arctg} x$ ir $dv=dx$, tada $du=\frac{dx}{x^2+1}$ ir $v=x$. Taigi

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Integralas $\int \frac{x dx}{x^2+1}$ apskaičiuojamas pažymėjus $x^2+1=z$.

3.8. Pratimai

1. Raskite šiuos integralus:

1) $\int (2x^3+3x^5) dx$; 2) $\int \left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{2}x\right) dx$;

3) $\int \frac{1+5x+4x^2}{x^2}dx$;

4) $\int (3+5x)^2 dx$;

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

6) $\int (x^4+7^x)dx$;

7) $\int \frac{9x^2-1}{3x-1}dx$;

8) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$;

9) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}dx$;

10) $\int \frac{e^{2x}+e^x \sin x}{e^x}dx$;

11) $\int \frac{2dx}{3-4x}$;

12) $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$;

13) $\int \frac{\cos x\, dx}{1-2\sin x}$;

14) $\int \sin x \cos x dx$;

15) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$;

16) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

17) $\int \frac{\sin 2x dx}{3+2\cos 2x}$;

18) $\int e^{\cos x} \sin x dx$;

19) $\int \sqrt{2+e^x}e^x dx$;

20) $\int \frac{2e^x dx}{(2+e^x)^2}$;

21) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

23) $\int \frac{dx}{9x^2+16}$;

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$;

25) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

26) $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3-2)}$;

27) $\int \frac{4}{\cos^2(x+4)}+\frac{5}{\sin^2(2x-1)}dx$;

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

29) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$;

30) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

31) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$;

32) $\int \frac{dx}{4+(3x-2)^2}$;

33) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

34) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$;

35) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

36) $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$;

37) $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$;

38) $\int \frac{3x+5}{x^2+8x+15}dx$;

39) $\int \frac{x-4}{x^2+x-12}dx$;

40) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

41) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$;

42) $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$;

43) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

44) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

2. Dalinio integravimo metodu raskite šiuos integralus:

1) $\int \operatorname{arctg} x dx$;

2) $\int xe^x dx$;

3) $\int x^2 e^x dx$;

4) $\int x \sin x dx$;

5) $\int x\cos 2x dx$; 6) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

7) $\int e^x \sin x dx$; 8) $\int e^{2x}\cos x dx$;

9) $\int (x-1)e^{2x}dx$; 10) $\int x\ln x dx$.

3. Raskite šiuos integralus:

1) $\int \frac{x^2dx}{x+1}$; 2) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x-1}$;

3) $\int \frac{x^3dx}{x^2+1}$; 4) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$;

5) $\int \frac{(x^3+x)dx}{(1-x)^2}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+x}$;

7) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2-1}$; 8) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$.

4. Raskite šiuos integralus:

1) $\int \sin x\cos 2x dx$; 2) $\int \sin x \sin 3x dx$;

3) $\int \cos x\cos 3x dx$; 4) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx$;

5) $\int \cos^4 x dx$; 6) $\int \sin^4 x dx$;

7) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; 8) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;

9) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+4}$; 10) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$;

11) $\int \frac{\cos^3 x dx}{1+\sin^2 x}$; 12) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}$;

13) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$; 14) $\int \frac{\cos^3 x dx}{1+\sin x}$.

5. Raskite šiuos iracionaliųjų funkcijų integralus:

1) $\int x\sqrt{x-1}dx$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$;

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$;

5) $\int \frac{\sqrt{4+x}dx}{x}$; 6) $\int x\sqrt{1+x}dx$;

7) $\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\frac{dx}{x}$; 8) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; 10) $\int \frac{\sqrt{x+9}dx}{x}$;

11) $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$.

3.9 Atsakymai

1. 1) $\frac{1}{2}(x^4+x^6)+C$; 2) $\frac{1}{9}x^6-\frac{1}{4}x^2+C$; 3) $-\frac{1}{x}+5\ln|x|+4x+C$; 4) $9x+15x^2+\frac{25}{3}x^3+C$; 5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$; 6) $\frac{1}{5}x^5+\frac{7^x}{\ln 7}+C$; 7) $\frac{3}{2}x^2+x+C$; 8) $2\sin x+C$; 9) $-\cos x-2\operatorname{ctg} x+C$; 10) $e^x-\cos x+C$; 11) $-\frac{1}{2}\ln|3-4x|+C$; 12) $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$; 13) $-\frac{1}{2}\ln|1-2\sin x|+C$; 14) $\frac{1}{2}\sin^2 x+C$; 15) $\frac{1}{\cos x}+C$; 16) $3\sqrt[3]{\sin x}+C$; 17) $-\frac{1}{4}\ln|3+2\cos 2x|+C$; 18) $-e^{\cos x}+C$; 19) $\frac{2}{3}\sqrt{(2+e^x)^3}+C$; 20) $-\frac{2}{2+e^x}+C$; 21) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; 22) $\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+$ $+C$; 23) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$; 24) $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2+9}|+C$; 25) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+$ $+C$; 26) $\operatorname{ctg}(2-x^3)+C$; 27) $4\operatorname{tg}(x+4)-\frac{5}{2}\operatorname{ctg}(2x-1)+C$; 28) $\frac{1}{2}\times$ $\times\arcsin 2x+C$; 29) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$; 30) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 31) $\arcsin(x+2)+$ $+C$; 32) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{2}+C$; 33) $\arcsin\frac{x}{4}+C$; 34) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$; 35) $\frac{1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 36) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 37) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+9}\right|+C$; 38) $\ln\frac{|x+5|^5}{(x+3)^2}+C$; 39) $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-12|+\frac{9}{14}\ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right|+C$; 40) $\ln|x-2|+$ $+\ln|x+5|+C$; 41) $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$; 42) $3\ln(x^2+4x+9)-\frac{7}{\sqrt{5}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$; 43) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$; 44) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$;

2. 1) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 2) $(x-1)e^x+C$; 3) $(x^2-2x+2)e^x+C$; 4) $-x\cos x+\sin x+C$; 5) $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 6) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C$; 7) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$; 8) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$; 9) $\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-$ $-\frac{1}{4}e^{2x}+C$; 10) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

3. 1) $\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|+C$; 2) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2\ln|x-1|+C$; 3) $\frac{1}{2}x^2-$ $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 4) $\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$; 5) $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{2}{x-1}+4\ln|x-1|+C$; 6) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$; 7) $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; 8) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$.

4. 1) $\frac{1}{2}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$; 2) $\frac{1}{4}\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x\right)+C$; 3) $\frac{1}{4}\left(\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x\right)+C$; 4) $\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$;

5) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 6) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 7) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$; 9) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}}+$ $+C$; 10) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$; 11) $2\operatorname{arctg}(\sin x)-\sin x+C$; 12) $-\frac{1}{3}\times$ $\times\operatorname{ctg}^3 x+C$; 13) $\operatorname{tg} x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$; 14) $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$.

5. 1) $\frac{2}{15}(3x^2-x-2)(\sqrt{x-1}+C$; 2) $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C$; 3) $2\sqrt{x}-$ $-2\ln(1+\sqrt{x})+C$; 4) $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; 5) $2\sqrt{x+4}+2\times$ $\times\ln\left|\frac{2-\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}\right|+C$; 6) $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$; 7) $\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{1-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}\right|-$ $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+C$; 8) $\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1)+C$; 9) $2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+$ $+48\ln|\sqrt[6]{x}-2|+C$; 10) $2\sqrt{x+9}+3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C$; 11) $-x+2\sqrt{x}-$ $-\ln(1+2\sqrt{x})+C$.

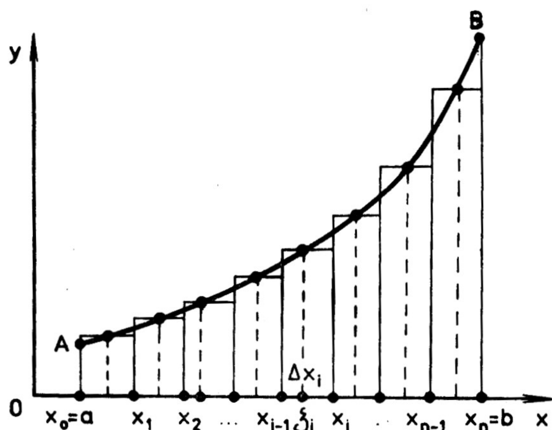
4. APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

4.1. Apibrėžtinio integralo sąvoka

Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$ ir įgyja neneigiamas reikšmes. Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 39 paveiksle. Figūra $ABba$, apribota tiesėmis $x=a$, $x=b$, kreive AB ir atkarpa $[a, b]$, vadinama kreivine trapecija. Apskaičiuokime šios trapecijos plotą. Tuo tikslu intervalą $[a, b]$ dalijame taškais $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ į n dalių. Gauname dalinius intervalus

$$[x_0, x_1],\quad [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n];$$

čia $a=x_0$, $b=x_n$. Iš dalijimo taškų brėžiame statmenis iki susikirtimo su kreive. Šie statmenys padalija kreivinę trapeciją į n elementariųjų kreivinių trapecijų. Kiekviename intervale $[x_{i-1}, x_i]$ parenkame taškus $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ir iš jų iškeliame statmenis iki



39 pav.

susikirtimo su funkcijos $y=f(x)$ grafiku. Brėžiame stačiakampius, kurių aukštinės yra funkcijos $f(x)$ reikšmės $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$, o pagrindai — atitinkami daliniai intervalai.

39 paveiksle pavaizduotos figūros, sudarytos iš atskirų stačiakampių, plotas lygus atskirų stačiakampių plotų sumai, t. y.

$$S_1=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Šią sumą trumpiau užrašome taip:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i;$$

čia $\sum$ (graikų raidė *sigma*) — sutrumpintas sumos ženklas. Raidės $\sum\limits_{i=1}^{n}$ apačioje ir viršuje užrašyti skaičiai 1 ir n rodo, kad indeksas i keičiasi nuo 1 iki n.

Reiškinys

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

vadinamas funkcijos $f(x)$ integraline suma intervale $[a, b]$. Mažinant dalinių intervalų ilgius, keisis ir integralinė suma. Platesniame matematinės analizės kurse įrodoma: kai $\max\Delta x_i \to 0$, tolydžiosios funkcijos $f(x)$ integralinė suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ artėja prie tam tikros ribos S, kuri nepriklauso nei nuo intervalo $[a, b]$

dalijimo būdo, nei nuo pasirinktų taškų ξ_i. Ši riba ir yra nagrinėjamosios kreivinės trapecijos plotas

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Spręsdami fizikos, geometrijos, mechanikos ir kitų mokslo sričių uždavinius, dažnai susiduriame su panašiomis sumomis. Apibendrinkime tokių uždavinių sprendimą.

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$. Šį intervalą padalykime į n dalių taškais

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Gauname dalinius intervalus

$$[x_0, x_1], \ [x_1, x_2], \ldots, \ [x_{i-1}, x_i], \ldots, \ [x_{n-1}, x_n],$$

kurių ilgiai nėra vienodi. Kiekviename intervale $[x_{i-1}, x_i]$ pasirenkame po tašką $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. Apskaičiavę funkcijos reikšmes $f(\xi_i)$ taškuose ξ_i, kiekvieną iš jų dauginame iš atitinkamo dalinio intervalo ilgio $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ ir gautas sandaugas sudedame:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_i)\Delta x_i + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ši suma vadinama funkcijos $f(x)$ integraline suma intervale $[a, b]$. Pažymėkime didžiausio dalinio intervalo ilgį raide λ:

$$\lambda = \max \Delta x_i.$$

Smulkinkime intervalo skaidinį, kad λ artėtų prie nulio. Tuomet dalinių intervalų skaičius n neaprėžtai didės. Paėmę kiekvieną skaidinį, sudarykime integralinę sumą σ:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Apibrėžimas. *Jeigu integralinė suma σ turi baigtinę ribą, nepriklausančią nei nuo intervalo $[a, b]$ skaidymo būdo, nei nuo taškų ξ_i parinkimo, tai riba $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ vadinama funkcijos $f(x)$ apibrėžtiniu integralu nuo a iki b ir žymima $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Taigi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Skaičiai a ir b vadinami apatiniu ir viršutiniu integravimo rėžiais. Nesunku nustatyti apibrėžtinio integralo geometrinę prasmę. Jeigu $f(x) \geqslant 0$, tai integralas

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

lygus plotui tokios kreivinės trapecijos, kuri apribota kreivės $y=f(x)$ lanku, x ašies atkarpa ir tiesėmis $x=a$, $x=b$, t. y.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

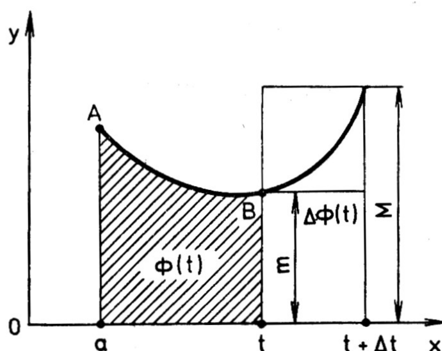
(žr. 39 pav.).

Jeigu $f(x) \leqslant 0$, kai $a \leqslant x \leqslant b$, tai integralas lygus atitinkamos kreivinės trapecijos plotui, paimtam su minuso ženklu.

4.2. Apibrėžtinis integralas su kintamu viršutiniu rėžiu

Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ tolydi intervale $[a, b]$. Parinkime bet kurį šio intervalo tašką $t \in [a, b]$ (žr. 40 pav.). Tuomet integralo $\int_a^t f(x)\,dx$ reikšmė priklauso nuo t: keičiant t reikšmes, keisis ir to integralo reikšmė. Taigi integralas

$$\int_a^t f(x)\,dx$$



40 pav.

yra kintamojo t funkcija, kurią žymėsime $\Phi(t)$, t. y.

$$\Phi(t)=\int_a^t f(x)\,dx.$$

Funkcija $\Phi(t)$ vadinama *integralu su kintamu viršutiniu rėžiu*. Geometriniu požiūriu šis integralas lygus kreivinės trapecijos $aABt$ plotui (žr. 40 pav.).

Įrodykime, kad $\Phi'(t)=f(t)$. Suteikime taško B abscisei t teigiamą pokytį Δt. Tuomet ir plotas įgis pokytį $\Delta\Phi(t)$. Intervale $[t, t+\Delta t]$ funkcijos $f(x)$ didžiausia ir mažiausia reikšmės atitinkamai lygios M ir m. Matome (40 pav.), kad

$$m\Delta t<\Delta\Phi(t)<M\Delta t.$$

Padaliję nelygybių narius iš Δt ($\Delta t>0$), gauname

$$m<\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}<M.$$

Kadangi funkcija $f(t)$ tolydi intervale $[a, b]$, tai

$$\lim_{\Delta t\to 0} m=\lim_{\Delta t\to 0} M=f(t),$$

arba

$$\Phi'(t)=f(t).$$

Pažymėję funkcijos $\Phi(t)$ argumentą raide x, gauname funkciją $\Phi(x)$, apibrėžtą intervale $[a, b]$, kurios išvestinė tame intervale lygi $f(x)$.

Vadinasi, $\Phi(x)$ yra viena iš funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų. Ji išsiskiria tuo, kad $\Phi(a)=0$.

Taigi kiekviena tolydžioji funkcija turi pirmykštę funkciją.

4.3. Niutono—Leibnico* formulė

Teorema. Jeigu funkcija $f(x)$ intervale $[a, b]$ yra tolydi, o $F(x)$ — jos pirmykštė funkcija, tai

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).}$$

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ tolydi intervale $[a, b]$, o $F(x)$ — jos pirmykštė. Tuomet

$$F'(x)=f(x).$$

* Newton Isaac — (1643—1727) — anglų fizikas ir matematikas, Leibniz Gottfried Wilhelm (1646—1716) — vokiečių matematikas.

4.2. skyrelyje sužinojome, kad

$$\Phi(t)=\int_a^t f(x)\,dx. \qquad (1)$$

yra tokia funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, kad

$$\Phi(a)=0.$$

Kadangi $\Phi(x)$ ir $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ dvi pirmykštės funkcijos intervale $[a, b]$, tai jos gali skirtis tik konstanta C, t. y.

$$\Phi(x)=F(x)+C. \qquad (2)$$

Jeigu šioje tapatybėje imsime $x=a$, tai

$$\Phi(a)=F(a)+C.$$

Kadangi $\Phi(a)=0$, tai $C=-F(a)$.

Dabar (2) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\Phi(x)=F(x)-F(a).$$

Šią funkcijos $\Phi(x)$ reikšmę įrašę į (1) lygybę, gauname

$$F(t)-F(a)=\int_a^t f(x)\,dx;$$

čia t — bet kuris intervalo $[a, b]$ taškas. Atskiru atveju, kai $t=b$,

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Gavome Niutono—Leibnico formulę

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Skirtumas $F(b)-F(a)$ paprastai žymimas šitaip: $F(x)\Big|_a^b$. Todėl

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Pavyzdžiai. Apskaičiuokime apibrėžtinius integralus.

1. $\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$;

2. $\int_2^3 \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0+1=1;$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

4.4. Pagrindinės apibrėžtinio integralo savybės

1. *Sukeitus apibrėžtinio integralo rėžius, paties integralo ženklas keičiasi priešingu, t. y.*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Pavyzdžiui, $\int_2^1 x^3 dx = -\int_1^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = -\frac{16}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -4 + \frac{1}{4} = -3\frac{3}{4}.$

2. *Jeigu a, b ir c yra bet kokie skaičiai, tai*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Pavyzdžiui, $\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$

3. *Pastovų daugiklį galima iškelti prieš apibrėžtinio integralo ženklą, t. y.*

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Pavyzdžiui, $\int_{-1}^2 2x^3 dx = 2\int_{-1}^2 x^3 dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^2 = \frac{x^4}{2}\Big|_{-1}^2 = 8 - \left(\frac{(-1)^4}{2}\right) = 8 - \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}.$

4. *Baigtinio skaičiaus funkcijų algebrinės sumos apibrėžtinis integralas lygus tų funkcijų apibrėžtinių integralų sumai, t. y.*

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

Pavyzdys.

$$\int_1^2 (x^2+x+1)\,dx=\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 xdx+\int_1^2 dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=6\frac{2}{3}-1\frac{5}{6}=\frac{40}{6}-\frac{11}{6}=\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}.$$

4.5. Apibrėžtinių integralų skaičiavimas

1. $$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^4=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_1^4=\frac{2\cdot 8}{3}-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}-$$

$$-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$$

2. $$\int_0^1 (3\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x})\,dx=\int_0^1 (3x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{1}{4}})\,dx=\left(3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+5\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+5\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_0^1=(2x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{5}{4}})\Big|_0^1=2+4=6.$$

3. $$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=1.$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}=(-\cos x+$$

$$+2\operatorname{tg} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+2\sqrt{3}-(-1+0)=-\frac{1}{2}+2\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}.$$

6. $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 0=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{18}.$$

7. $$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^3=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}.$$

8. $$\int_0^{\pi} (e^x-\cos x)\,dx=(e^x-\sin x)\Big|_0^{\pi}=e^{\pi}-\sin\pi-(e^0-\sin 0)=e^{\pi}-1.$$

9. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{4}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=$
$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=\ln\sqrt{1{,}5}.$

10. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_{-2}^0=\ln|0+1|-(\ln|-2+\sqrt{4+1}|)=$
$=\ln 1-\ln(\sqrt{5}-2)=-\ln(\sqrt{5}-2).$

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx=(\operatorname{tg} x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$
$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-(\operatorname{tg} 0-0)=1-\frac{\pi}{4}.$

12. Apskaičiuokime integralus kintamojo keitimo metodu, kuris nusakomas šitokia teorema: *jei funkcija $x=\varphi(t)$ didėja (arba mažėja), kai t kinta nuo α iki β, ir turi tolydžią išvestinę, be to, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, tai*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1. $\int\limits_0^1 (2x+1)^4 dx$. Tarkime, kad $2x+1=z$ (z — monotoninė funkcija). Tuomet $2dx=dz$ ir $dx=\frac{1}{2}dz$. Atsižvelgę į keitinį $2x+1=z$, keičiame integralo rėžius: kai $x=0$, $z=1$; kai $x=1$, $z=3$.

Tada

$$\int\limits_0^1 (2x+1)^4 dx=\int\limits_1^3 z^4\cdot\frac{1}{2}dz=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 z^4 dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5}\Big|_1^3=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{242}{5}=\frac{242}{10}=24{,}2.$$

2. $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2+1}$. Jeigu $x^2+1=z$ ir $2xdx=dz$, tai $xdx=\frac{1}{2}dz$. Keičiame integravimo rėžius: kai $x=2$, $z=5$; kai $x=3$, $z=10$. Taigi

$$\int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\limits_5^{10}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|\Big|_5^{10}=\frac{1}{2}\ln 10-\frac{1}{2}\ln 5=$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}.$$

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$. Pakeitę $1-\cos x=z$, gauname $\sin x dx=dz$. Keičiame rėžius: kai $x=\frac{\pi}{2}$, $z=1$; kai $x=\pi$, $z=2$. Taigi

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2}=2\int\limits_1^2\frac{dz}{z^2}=2\int\limits_1^2 z^{-2}dz=-2z^{-1}\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{2}{z}\Big|_1^2=-1+2=1.$$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}e^{\cos x}\sin x dx$. Pakeitę $\cos x=z$, randame $-\sin x dx=dz$ ir $\sin x dx=-dz$. Keičiame integravimo rėžius: kai $x=0$, $z=1$; kai $x=\frac{\pi}{3}$, $z=\frac{1}{2}$. Vadinasi,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}e^{\cos x}\sin x dx=-\int\limits_1^{\frac{1}{2}}e^z dz=-e^z\Big|_1^{\frac{1}{2}}=-e^{\frac{1}{2}}-(-e^1)=$$

$$=-e^{\frac{1}{2}}+e=e-\sqrt{e}.$$

5. $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx$. Jeigu $x^2-7=z$ ir $2xdx=dz$, tai $xdx=\frac{1}{2}dz$. Nauji integravimo rėžiai: kai $x=2\sqrt{2}$, $z=1$; kai $x=4$, $z=9$. Atsižvelgę į keitinius ir naujus rėžius, gauname

$$\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx=\frac{3}{2}\int\limits_1^9\sqrt{z}dz=\frac{3}{2}\int\limits_1^9 z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9=$$

$$=\sqrt{z^3}\Big|_1^9=27-1=26.$$

6. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{3dx}{2\cos^2 3x}$. Jeigu $3x=z$ ir $3dx=dz$, tai $dx=\frac{1}{3}dz$. Keičiame integravimo rėžius: kai $x=\frac{\pi}{12}$, $z=\frac{\pi}{4}$; kai $x=\frac{\pi}{9}$, $z=\frac{\pi}{3}$. Vadinasi,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{3dx}{2\cos^2 3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} z\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1).$$

7. Apskaičiuokime integralą

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}.$$

Trinario x^2-3x+2 šaknys yra $x_1=1$, $x_2=2$. Randame koeficientus A ir B, su kuriais galioja tapatybė

$$\frac{1}{x^2-3x+2}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2},\ \frac{1}{x^2-3x+2}\equiv\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Kadangi abiejose tapatybės pusėse vardikliai yra vienodi, tai

$$0x+1\equiv A(x-2)+B(x-1)=Ax-2A+Bx-B,$$
$$0x+1\equiv(A+B)x-2A-B.$$

Iš paskutinės lygybės išplaukia, kad koeficientai prie x ir laisvieji nariai turi būti lygūs, t. y.

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A-B=1, \end{cases} \quad A=-1,\ B=1.$$

Vadinasi,

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}=-\int_3^4\frac{dx}{x-1}+\int_3^4\frac{dx}{x-2}=$$
$$=(-\ln|x-1|+\ln|x-2|)\Big|_3^4=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_3^4=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}.$$

4.6. Apibrėžtinio integralo dalinis integravimas

Tarkime, kad funkcijos $u=u(x)$ ir $v=v(x)$ intervale $[a, b]$ yra tolydžios. Randame šių funkcijų sandaugos diferencialą:

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=$$
$$=u'vdx+uv'dx=v(u'dx)+u(v'dx)=$$
$$vdu+udv.$$

Taigi

$$d(uv)=vdu+udv.$$

Iš čia

$$udv=d(uv)-vdu.$$

Gautos lygybės abi puses suintegravę nuo a iki b, gauname:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du,$$

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.}$$

Ši lygybė vadinama *dalinio integravimo formule.*

Pavyzdžiai. 1. $\int_0^{\pi} x \cos x dx.$

Pažymėję $u = x$ ir $dv = \cos x dx$, gauname $du = dx$, $v = \sin x$. Taigi

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = (\pi \sin \pi - 0 \cdot \sin 0) + \cos x \Big|_0^{\pi} =$$
$$= \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

2. $\int_0^1 x e^{2x} dx$. Pažymėję $u = x$ ir $dv = e^{2x} dx$, gauname $du = dx$, $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$. Taigi

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

3. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$. Pakeitę $u = x$, $dv = \sin x dx$, randame $du = dx$, $v = -\cos x$. Taigi

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx =$$
$$= -(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

4. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$. Pakeitę $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, randame $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Atsižvelgę į šiuos keitinius, pradinį integralą randame šitaip:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

5. $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$. Jeigu $u = x^2$ ir $dv = \cos x dx$, tai $du = 2x dx$, $v = \sin x$. Taigi

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x dx.$$

Šį integralą vėl integruojame dalimis: $u = x$, $dv = \sin x dx$; $du = dx$, $v = -\cos x$. Taigi

$$\int_0^\pi x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi \cos \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \pi.$$

Vadinasi,

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = -2\pi.$$

4.7. Netiesioginiai integralai

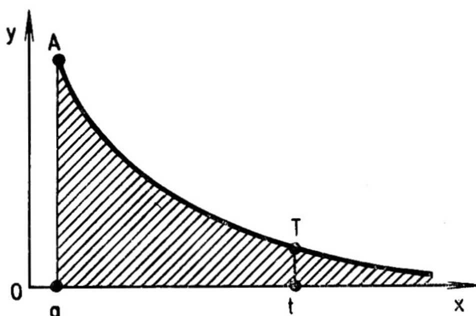
Apibrėždami integralą $\int_a^b f(x) dx$ minėjome, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi baigtiniame intervale $[a, b]$. Toks integralas vadinamas tiesioginiu. Jeigu funkcija $f(x)$ nėra tolydi arba integravimo ribos nėra baigtinės (yra begalinės), tai apibrėžtinio integralo apibrėžimas (5.1) tiesiogiai nepritaikomas. Praplėskime apibrėžtinio integralo sąvoką.

1. Tarkime, kad funkcija $f(x)$ tolydi begaliniame intervale $[a, +\infty)$. Tuomet ji integruojama kiekviename daliniame jo intervale $[a, t]$, t. y. egzistuoja apibrėžtinis integralas $\int_a^t f(x) dx$, kai $t > a$.

Jei egzistuoja baigtinė minėto integralo riba, kai $t \to +\infty$, tai ją vadiname funkcijos $f(x)$ netiesioginiu integralu nuo a iki $+\infty$ ir simboliškai žymime taip:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx \qquad (1)$$

41 paveiksle matome, kad $\int_a^t f(x)\,dx$ lygus kreivinės trapecijos $aATt$ plotui, o netiesioginis integralas $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ reiškia plotą figūros, apribotos kreive $y=f(x)$, tiese $x=a$ ir ašimi Ox.



41 pav.

Jeigu (1) formulėje riba

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

yra baigtinė, tai sakome, kad netiesioginis integralas konverguoja. Jeigu minėtoji riba yra begalinė arba visai neegzistuoja, tai netiesioginis integralas diverguoja.

Pavyzdžiai. 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} (\text{arctg}\, t - \text{arctg}\, 1) =$
$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Integralas konverguoja.

2. Netiesioginis integralas $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$ diverguoja, nes

$$\int_1^t \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln 2, \text{ o } \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = +\infty.$$

Analogiškai apibrėžiamas funkcijos $f(x)$ integralas intervale $(-\infty, b)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx.$$

Funkcijos $f(x)$ netiesioginis integralas intervale $(-\infty, +\infty)$ apibrėžiamas šitaip:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. Funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b)$ ir taške $x=b$ turi antrosios rūšies trūkį. Intervale $[a, b)$ pasirinkę bet kokį skaičių t, $a<t<b$, turėsime integralą

$$\int_{a}^{t} f(x)\,dx,$$

kurio reikšmė priklausys nuo pasirinktojo t. Jei egzistuoja baigtinė šio integralo riba, kai $t\to b$, tai ją vadiname funkcijos $f(x)$ netiesioginiu integralu intervale $[a, b]$ ir žymime

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b} \int_{a}^{t} f(x)\,dx.} \qquad (2)$$

Jeigu (2) formulėje riba

$$\lim_{t\to b} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

yra baigtinė, tai sakome, kad netiesioginis integralas konverguoja. Jeigu minėtoji riba begalinė arba visai neegzistuoja, tai netiesioginis integralas diverguoja.

Pavyzdžiai. 1. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Šis integralas yra netiesioginis, nes funkcija $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ taške $x=1$ turi trūkį. Iš intervalo $(0, 1)$ imame bet kurį t ir skaičiuojame

$$\int_{0}^{t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t.$$

Po to randame

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \arcsin t = \frac{\pi}{2}.$$

Integralas konverguoja.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to 1} (-\ln(1-t)) = \lim_{t\to 1} \ln \frac{1}{(1-t)} = +\infty,\ 0<t<1.$

Integralas diverguoja.

4.8. Pratimai

Apskaičiuokite apibrėžtinius integralus:

1. $\int_2^4 x dx;$

2. $\int_1^4 \sqrt{x} dx;$

3. $\int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x} dx;$

4. $\int_1^4 \left(3\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx;$

5. $\int_2^8 \frac{2+x}{x^2} dx;$

6. $\int_0^{0,5} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}};$

7. $\int_1^2 \frac{2+x^4}{x} dx;$

8. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{4+3x^3};$

9. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x^2-5x+2) dx;$

10. $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3+1};$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx;$

12. $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2};$

13. $\int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2};$

14. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx;$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx;$

16. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^2 x dx;$

17. $\int_{-1}^1 \operatorname{tg} x dx;$

18. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x};$

19. $\int_0^1 e^{2x}dx$;

20. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$;

21. $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x-1}$;

22. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

23. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$;

24. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

25. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx$;

26. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$;

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$;

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$;

29. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3dx}{9+16x^2}$;

30. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3+4x^2}$;

31. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;

32. $\int_0^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$;

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$;

34. $\int_1^2 x \ln x dx$;

35. $\int_2^3 (x-1) \ln x dx$;

36. $\int_2^e x \ln x dx$;

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$;

38. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$;

39. $\int_{-2,5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$;

40. $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+(3x-1)^2}$;

41. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+10x+34}$;

42. $\int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+20}$;

43. $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$;

44. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$;

45. $\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx$;

46. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

47. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$;

48. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(1-x)^2}$;

49. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

50. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

4.9. Atsakymai

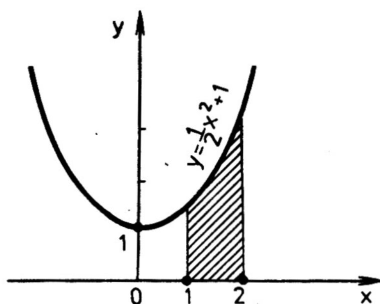
1. 6. **2.** $4\frac{2}{3}$. **3.** 4. **4.** 22. **5.** $\frac{3}{4}+\ln 4$. **6.** $\frac{\pi}{3}$. **7.** $\frac{15}{4}+\ln 4$. **8.** $\frac{1}{9}\ln\frac{7}{4}$. **9.** $-\frac{9}{8}$. **10.** $\ln\sqrt[3]{4{,}5}$. **11.** 1. **12.** $\frac{\pi}{12}$. **13.** $\approx 0{,}46$. **14.** $3(e-1)$. **15.** $\frac{1}{3}$. **16.** 0. **17.** 0. **18.** $\frac{3}{2}$. **19.** $\frac{e^2-1}{2}$. **20.** $\frac{(e-1)^5}{5}$. **21.** $\ln(1+e)$. **22.** $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$. **23.** $\frac{1}{2}$. **24.** $\ln 2$. **25.** $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$. **26.** $\frac{3}{16}$. **27.** $\frac{2}{15}$. **28.** $\frac{\pi}{16}$. **29.** $\frac{\pi}{48}$. **30.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$. **31.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **32.** $\frac{\pi}{2}$. **33.** $\frac{\pi}{4}$. **34.** $\ln 4-\frac{3}{4}$. **35.** $\approx 1{,}4$. **36.** $\frac{1}{4}e^2-\ln 4+1$. **37.** $\pi-2$. **38.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **39.** $\frac{\pi}{6}$. **40.** $\frac{\pi}{24}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **41.** $\frac{\pi}{12}$. **42.** $\frac{\pi}{16}$. **43.** π. **44.** $\frac{1}{2}$. **45.** 1. **46.** $\frac{1}{3}$. **47.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **48.** Diverguoja. **49.** $\frac{\pi}{3}$. **50.** π.

5. APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAI

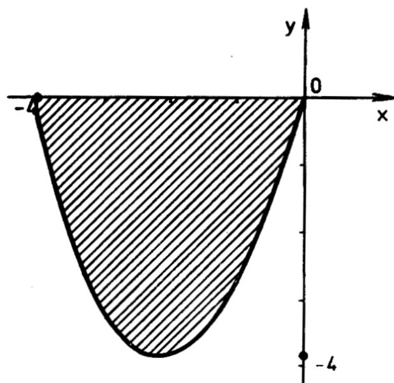
5.1. Plokščiųjų figūrų plotų skaičiavimas

Žinome, kad kreivinės trapecijos, kurią riboja kreivė $y=f(x)$, ašies Ox atkarpa $[a, b]$ ir tiesės $x=a$ ir $x=b$, plotas išreiškiamas šitaip:

$$\boxed{S=\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx,}$$



42 pav.



43 pav.

jeigu $f(x)\geqslant 0$, ir

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

jeigu $f(x)\leqslant 0$ (žr. 4.1). Iš šių formulių išplaukia, kad ieškant kurios nors plokščiosios figūros ploto, tenka skaičiuoti apibrėžtinį integralą.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime plotą figūros, kurią riboja linijos $y=\frac{1}{2}x^2+1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Brėžiame nurodytų funkcijų grafikus (žr. 42 pav.). Kadangi ieškomoji figūra yra virš ašies Ox, tai naudojamės formule $S=\int_a^b f(x)\,dx$; čia $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$, integravimo rėžiai $a=1$, $b=2$. Taigi

$$S=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}+x\right)\Big|_1^2=\frac{8}{6}+2-\left(\frac{1}{6}+1\right)=$$

$$=\frac{7}{6}+1=2\frac{1}{6}\ (\text{kv. v.}).$$

2. Apskaičiuokime plotą figūros, apribotos ašimi Ox ir kreive $y=x^2+4x$.

Randame taškus, kuriuose parabolė $y=x^2+4x$ kerta ašį Ox: $x^2+4x=0 \leftrightarrow x(x+4)=0$; $x_1=0$, $x_2=-4$. Taigi integravimo rėžiai yra $a=-4$, $b=0$. Nubraižę funkcijos $y=x^2+4x$ grafiką, matome,

kad ieškomasis plotas yra žemiau ašies Ox (žr. 43 pav.), todėl naudojamės formule

$$S=\int_a^b |f(x)|dx, \text{ arba } S=-\int_a^b f(x)dx,$$

nes $\int_a^b (-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx$. Skaičiuojame:

$$S=-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{-4}^{0}=-$$

$$=-\left(\left(\frac{0}{3}+2\cdot 0\right)-\left(-\frac{64}{3}+32\right)\right)=-\left(-10\frac{2}{3}\right)=10\frac{2}{3} \text{ (kv. v.)}.$$

Norint rasti plotą figūros, apribotos susikertančiomis kreivėmis $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ (žr. 44 pav.), reikia apskaičiuoti dviejų kreivinių trapecijų plotų skirtumą, t. y.

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx,$$

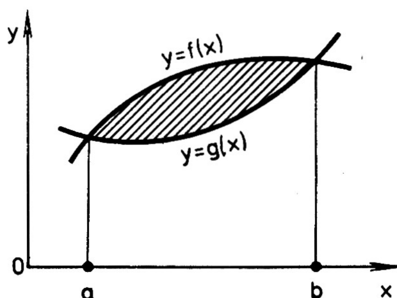
arba

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

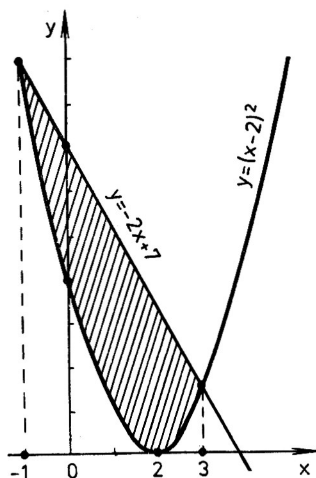
Integravimo rėžius randame išsprendę sistemą

$$\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x). \end{cases}$$

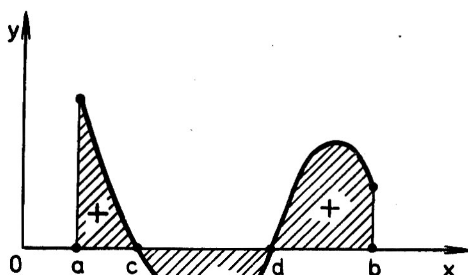
Pavyzdys. Apskaičiuokime plotą figūros, apribotos linijomis $y=(x-2)^2$ ir $2x+y-7=0$.



44 pav.



45 pav.



46 pav.

Figūrą, kurios plotą norime apskaičiuoti, riboja tiesė $y=-2x+7$ ir parabolė $y=x^2-4x+4$ (žr. 45 pav.). Rasime integravimo rėžius:

$$\begin{cases} y=x^2-4x+4, \\ y=-2x+7. \end{cases}$$

Sulyginę sistemos lygčių dešiniąsias puses, gauname

$$x^2-4x+4=-2x+7,$$
$$x^2-2x-3=0,$$
$$x=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm2,$$
$$x_1=-1;\ x_2=3.$$

Plotas, kurį riboja parabolė $y=x^2-4x+4$ ir tiesė $y=-2x+7$, skaičiuojamas šitaip:

$$S=\int_{-1}^{3}(-2x+7)\,dx-\int_{-1}^{3}(x^2-4x+4)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2x+7-x^2+4x-4)\,dx=\int_{-1}^{3}(2x-x^2+3)\,dx=$$

$$=\left(x^2-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{-1}^{3}=9-9+9-\left(1+\frac{1}{3}-3\right)=9+1\frac{2}{3}=10\frac{2}{3}\text{(kv. v.)}$$

Imkime funkciją $y=f(x)$, kuri yra tolydi intervale $[a, b]$ ir keičia ženklą tame intervale baigtinį skaičių kartų (žr. 46 pav.).

Apskaičiuokime plotą figūros, apribotos ašimi Ox, kreive $y=f(x)$ ir tiesėmis $x=a$, $x=b$ (žr. 46 pav.). Kaip matome, inter-

valuose $[a, c]$ ir $[d, b]$ funkcija yra teigiama, o intervale $[c, d]$ — neigiama, todėl

$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx.$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime plotą figūros, apribotos linijomis $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ (žr. 47 pav.).

Intervale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ figūra yra virš ašies Ox, o intervale $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ — žemiau ašies Ox, todėl

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

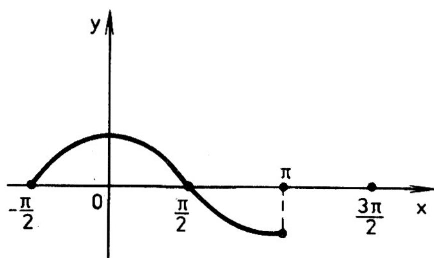
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+1-(-1)=3 \text{ (kv. v.)}.$$

2. Apskaičiuokime plotą figūros, apribotos linijomis $y=x$ ir $y=x^2-4x$ (žr. 48 pav.).

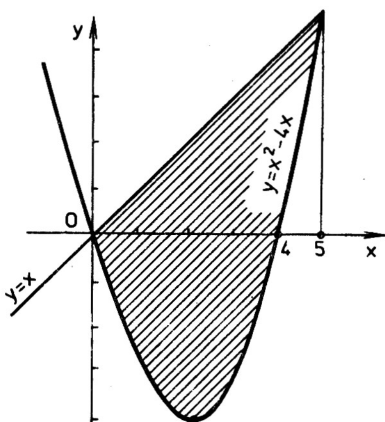
Randame integravimo rėžius:

$$\begin{cases} y=x, \\ y=x^2-4x; \end{cases}\quad x^2-4x=x;\quad x^2-5x=0;$$

$$x(x-5)=0;\qquad x_1=0;\qquad x_2=5.$$



47 pav.



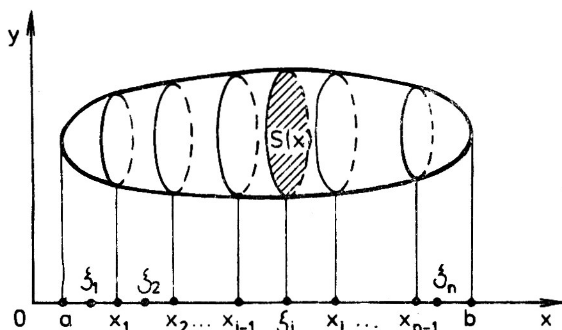
48 pav.

Taigi

$$S=\int_0^5 x\,dx-\int_0^5 (x^2-4x)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^5=\frac{25}{2}-\frac{125}{3}+50=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ \text{(kv. v.)}.$$

5.2. Kūno tūrio skaičiavimas, kai žinomi skerspjūvių plotai



49 pav.

Kūnas, kurio tūrį reikia apskaičiuoti, pavaizduotas 49 paveiksle. Kirskime šį kūną kuria nors plokštuma, statmena ašiai Ox. Pjūvio plokštumos padėtis priklauso nuo pasirinktos $x\in[a,\ b]$ reikšmės. Keisdami x reikšmes, gausime įvairius kūno pjūvius. Taigi pjūvio plotas S yra abscisės x funkcija, t. y. $S=S(x)$. Jeigu $S(x)$ yra tolydžioji funkcija, tai pjūvio plotas, stumiant kertančiąją plokštumą, keisis tolygiai. Intervalą $[a,\ b]$ padaliję į n dalių, gausime šitokius dalinius intervalus:

$$[a,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1},\ x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1},\ b].$$

Per dalijimo taškus nubrėšime plokštumas, statmenas ašiai Ox. Gautosios plokštumos kūną dalija į n atskirų sluoksnių, kurių kiekvieną galime apytiksliai laikyti ritiniu (arba prizme). Vadinasi, 1-ojo sluoksnio — ritinio tūris yra

$$\Delta V_i=S(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

čia $S(\xi_i)$ — to ritinio pagrindo plotas, o Δx_i — aukštinė. Be to, $\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]$. Sudėję visų sluoksnių tūrių apytiksles reikšmes, gauname

$$V\approx\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

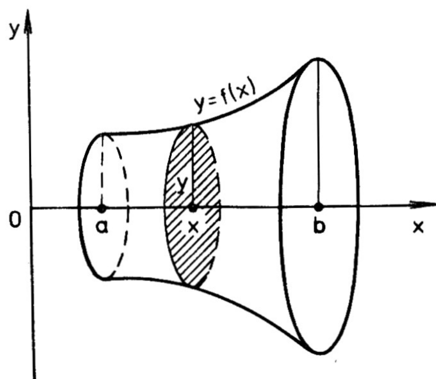
Šios sumos riba, kai $n \to \infty$ ir $\max \Delta x_i \to 0$, ir bus 49 paveiksle pavaizduoto kūno tūris, t. y.

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \Delta x_i,$$

arba

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\, dx.}$$

5.3. Sukinio tūris



50 pav.

Sakykime, funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$. Reikia apskaičiuoti tūrį kūno, gauto sukantis apie ašį Ox plokščiajai figūrai, apribotai funkcijos $y = f(x)$ grafiku ir tiesėmis $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (žr. 50 pav.). Pjūvis, gautas kirtus sukinį plokštuma, statmena ašiai Ox, yra skritulys. Šio skritulio spindulys yra $|y|$, o plotas $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$. Pritaikę formulę

$$V = \int_a^b S(x)\, dx,$$

gauname sukinio tūrį

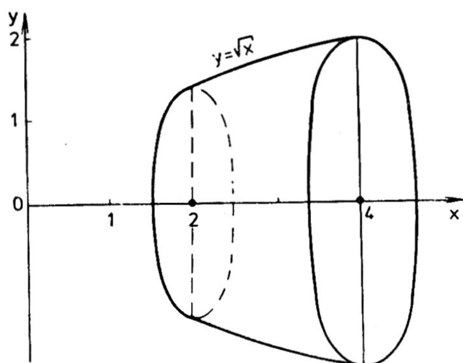
$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx;} \qquad (1)$$

čia indeksas (x) prie tūrio V rodo, kad kreivinė trapecija sukama apie ašį Ox. Analogiškai įrodoma, kad tūris kūno, gauto sukantis

apie ašį Ox plokščiajai figūrai, apribotai linijomis $x=g(y)$, $x=0$, $y=a$, $y=b$, yra

$$V_y=\pi\int_a^b g^2(y)\,dy \tag{2}$$

5.4. Sukinių tūrių skaičiavimo uždaviniai



51 pav.

1. Raskime tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Ox figūrą, apribotą kreivėmis $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$ (žr. 51 pav.).

Taikome sukinių tūrių skaičiavimo (1) formulę:

$$V=\pi\int_2^4(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_2^4 x\,dx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_2^4=8\pi-2\pi=6\pi\ \text{(kub. v.)}.$$

2. Raskime tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Oy figūrą, apribotą kreivėmis: $y^2=4-x$, $x=0$ (žr. 52 pav.). Pasinaudoję (2) formule $V_y=\pi\int_a^b g^2(y)\,dy$, iš lygybės $y^2=4-x$ randame

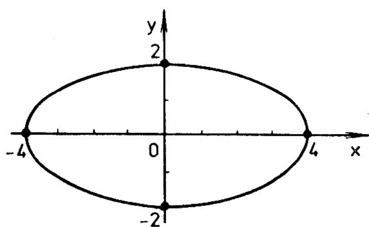
$$x=4-y^2$$

ir

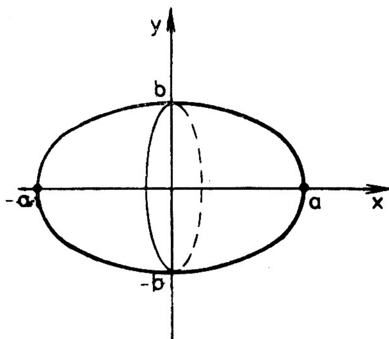
$$x^2=16-8y^2+y^4.$$

Pagal (2) formulę apskaičiuojame sąlygoje minėto kūno tūrį:

$$V_y=2\pi\int_0^2(16-8y^2+y^4)\,dy=$$



52 pav.



53 pav.

$$=2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=$$

$$=2\pi\cdot\frac{256}{15}=\frac{512}{15}\pi\ \text{(kub. v.)}.$$

3. Raskime tūrį elipsoido (žr. 53 pav.), gauto sukant apie ašį Ox elipsę $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Iš šios formulės išreiškiame y^2:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

Kadangi kūnas yra simetriškas ašies Oy atžvilgiu, tai pritaikę (1) formulę jo tūrį galime skaičiuoti šitaip:

$$V=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

4. Raskime tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Ox figūrą, apribotą linijomis $y^2=4x$, $y=x$ (žr. 54 pav.). Randame integravimo rėžius:

$$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x,\end{cases}\qquad\begin{cases}y^2=4x,\\ y^2=x^2;\end{cases}$$

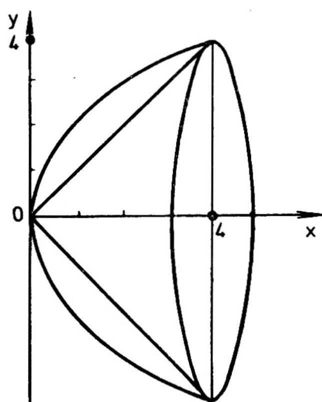
$$x^2=4x,\ x^2-4x=0,$$

$$x(x-4)=0;\ x_1=0,\ x_2=4.$$

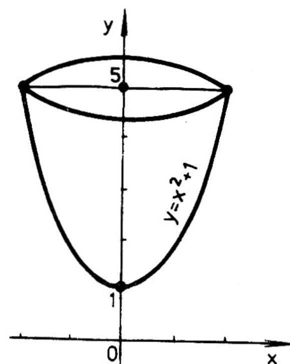
Taikydami (1) formulę, skaičiuojame minėto kūno tūrį:

$$V_x=\pi\int_0^4 4x\,dx-\pi\int_0^4 x^2dx=\pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=$$

$$=\pi\left(32-\frac{64}{3}\right)=\frac{32}{3}\pi\ \text{(kub. v.)}.$$



54 pav.



55 pav.

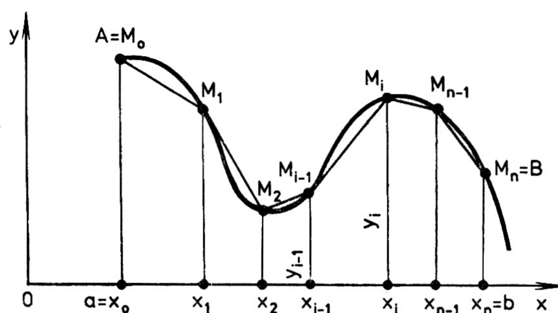
5. Raskime tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Ox figūrą, apribotą linijomis $y=x^2+1$, $y=5$ (žr. 55 pav.). Paveiksle matome, kad integravimo rėžiai yra $a=1$, $b=5$. Skaičiuojame gautojo sukinio tūrį:

$$V_y=\pi\int_1^5 (y-1)\,dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-y\right)\Big|_1^5=\pi\left(\left(\frac{25}{2}-5\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{15}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=8\pi \text{ (kub. v.)}.$$

5.5. Kreivės ilgis

Nagrinėsime funkcijos $y=f(x)$, apibrėžtos intervale $[a, b]$, grafiką (žr. 56 pav.). Sakykime, $f(x)$ ir $f'(x)$ yra tolydžiosios funkcijos minėtame intervale. Tokios kreivės vadinamos glodžiosiomis.



56 pav.

Kreivę AB padalykime į n dalių taškais $A=M_0$, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., $M_n=B$. Sujungę tuos taškus tiesėmis, gauname įbrėžtąją laužtę. Tarkime, kad jos perimetras yra P_n.

Jeigu egzistuoja įbrėžtos į kreivę laužtės perimetro riba P_n, kai didžiausioji laužtės atkarpa λ artėja prie nulio, tai ši riba vadinama *kreivės AB ilgiu:*

$$l=\lim_{\lambda\to 0} P_n.$$

Apskaičiuokime kreivės ilgį tarp taškų A ir B, kurių abscisės yra a ir b (žr. 56 pav.).

Imkime taškus $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ ir $M_i(x_i, y_i)$. Apskaičiuokime vienos laužtės dalies $l_i=M_{i-1}M_i$ ilgį. Naudokimės atstumo tarp dviejų taškų formule. Taigi

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}, \qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Pritaikę Lagranžo formulę, galime užrašyti:

$$y_i-y_{i-1}=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1});$$

čia $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$. Tuomet

$$l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f'(\xi_i))^2(\Delta x_i)^2}=\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Laužtės $AM_1M_2\cdots M_{n-1}B$ perimetras yra

$$P_n=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Gavome tolydžiosios funkcijos $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ integralinę sumą intervale $[a, b]$. Egzistuoja šios sumos riba, kai $\lambda\to 0$. Taigi

$$l=\lim_{\lambda\to 0} P_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i=$$

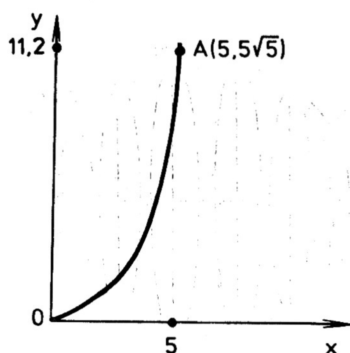
$$=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx,$$

t. y.

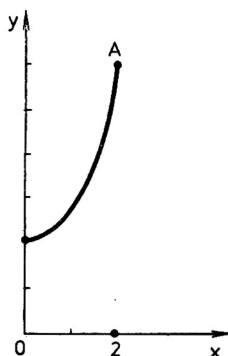
$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.} \qquad (1)$$

Jeigu kreivė išreikšta funkcija $x=f(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$, tai

$$\boxed{l=\int_c^d\sqrt{1+x'^2}dy.} \qquad (2)$$



57 pav.



58 pav.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime kreivės $y=\sqrt{x^3}$ lanko ilgį tarp taškų $O(0, 0)$ ir $A(5, 5\sqrt{5})$ (žr. 57 pav.).

Randame funkcijos $y=\sqrt{x^3}$ išvestinę:

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Skaičiuojame lanko ilgį:

$$l=\int_0^5\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{4}{9}\int_0^5\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{9x}{4}\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9x}{4}\right)^3}\Bigg|_0^5=\frac{343}{27}.$$

2. Apskaičiuokime parabolės $y=x^2+2$ lanko ilgį tarp taškų $O(0, 2)$ ir $A(2, 6)$ (žr. 58 pav.). Kadangi $y'=2x$, tai remdamiesi (1) formule turime:

$$l=\int_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=2\int_0^2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}dx=$$

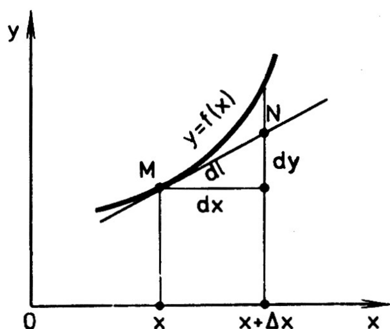
$$=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}+\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{17}{4}}+\frac{1}{8}\ln\left(2+\sqrt{\frac{17}{4}}\right)-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}\right)=$$

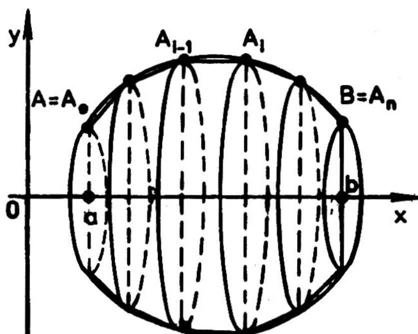
$$=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})\approx 4{,}65.$$

Sakykime, kad taškas M slenka kreive AB. Jį atitinka kintama abscisė x, $x\in[a, b]$. Tuomet lanko ilgis AM yra argumento x funkcija. Formulėje

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$$



59 pav.



60 pav.

viršutinį integralo rėžį b pakeitę x, gauname lanko AM ilgio formulę

$$l_x = \int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}dt.$$

Žinome, kad $l'(x) = \frac{dl}{dx} = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Iš čia

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, \quad \text{arba} \quad dl = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Gavome lanko diferencialo formulę. 59 paveiksle matome, kad lanko diferencialas yra liestinės, nubrėžtos per tašką M, ilgis, t. y. trikampio, kurio statiniai yra dx ir dy, įžambinės ilgis.

5.6 Sukinio paviršiaus plotas

Sakykime, kad funkcijos $f(x) \geqslant 0$ ir $f'(x)$ yra tolydžios intervale $[a, b]$. Funkcijos $y=f(x)$ grafikas yra kreivė AB (žr. 60 pav.). Apskaičiuokime sukinio, gauto sukant kreivę AB apie ašį Ox, paviršiaus plotą. Tuo tikslu šią kreivę dalijame į n dalių taškais A_0, A_1, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_n. Šiuos taškus sujungę atkarpomis, gauname į kreivę AB įbrėžtą laužtę $A_0A_1 \ldots A_{i-1}A_i \ldots A_{n-1}A_n$.

Sukdami laužtę apie ašį Ox, gauname tam tikrą paviršių, sudarytą iš atskirų dalių — nupjautinių kūgių (ritinių) šoninių paviršių. Vieno nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S = 2\pi\frac{R_1+R_2}{2}l;$$

čia R_1 ir R_2 — kūgio pagrindų spinduliai, l — sudaromoji. Laužtės atkarpos $A_{i-1}A_i$ ilgis apytiksliai lygus lanko $A_{i-1}A_i$ ilgiui:

$$|A_{i-1}A_i| \approx \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$$

(žr. 5.5). Paviršiaus, gauto sukant atkarpą $A_{i-1}A_i$ apie ašį Ox, plotas yra

$$S_i \approx 2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Skirtumai $(\xi_i - x_{i-1})$ ir $(x_i - \xi_i)$ yra pakankamai maži. Be to, funkcija $f(x)$ tolydi intervale $[a, b]$. Todėl galima užrašyti

$$\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \approx f(\xi_i).$$

Viso paviršiaus, gauto sukant laužtę AB apie ašį Ox, plotas

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Gavome funkcijos $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$ integralinę sumą intervale $[a, b]$. Egzistuoja šios sumos riba, kai $\lambda \to 0$. Taigi sukinio paviršiaus plotas, gautas sukant kreivę AB apie ašį Ox, yra

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx,$$

t. y.

$$\boxed{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.} \qquad (1)$$

Paviršiaus, gauto sukant kreivę AB, kurios lygtis $x=g(y)$, $y \in [c, d]$, apie ašį Oy, plotas yra

$$\boxed{S = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}dy.} \qquad (2)$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime sukinio, gauto sukantis apie ašį Ox parabolės $y^2=4x$ lankui tarp taškų $O(0, 0)$ ir $A(3, 2\sqrt{3})$, paviršiaus plotą.

Spręsdami uždavinį, naudojamės (1) formule:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Pagal sąlygą $f(x)=\sqrt{4x}=2x^{\frac{1}{2}}$. Randame šios funkcijos išvestinę:

$$f'(x)=(2x^{\frac{1}{2}})'=x^{-\frac{1}{2}}.$$

Taigi

$$S=2\pi\int_0^3 2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(x^{-\frac{1}{2}})^2}dx=4\pi\int_0^3\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx=$$

$$=4\pi\int_0^3\sqrt{x+1}dx.$$

Pakeitę $x+1=z$, gauname $dx=dz$. Keičiame ir integravimo ribas: kai $x=0$, $z=1$; kai $x=3$, $z=4$. Randame minėtą sukinio paviršiaus plotą:

$$S=4\pi\int_1^4 z^{\frac{1}{2}}dz=4\pi\left.\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4=4\pi\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\Big|_1^4=\frac{56\pi}{3}\text{ (kv. v.)}.$$

2. Apskaičiuokite paviršiaus, gauto sukant sinusoidę ($0\leqslant x\leqslant\pi$) apie ašį Ox, plotą.

Kadangi sinusoidė yra funkcijos $f(x)=\sin x$ grafikas ir $f'(x)=\cos x$, tai naudodamiesi (1) formule gaunarne

$$S=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx.$$

Pakeitę $\cos x=z$, $-\sin xdx=dz$, $\sin xdx=-dz$, randame:

$$S=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+z^2}dz=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{z^2+1}dz.$$

Pritaikome 3.1 paragrafo 19-ąją formulę:

$$S=2\pi\left(\frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}+\frac{1}{2}\ln|z+\sqrt{z^2+1}|\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)\right)=$$

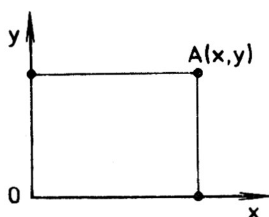
$$=2\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)\Big)=$$

$$=2\pi(\sqrt{2}+\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)))=$$

$$=2\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}\right)=$$

$$=2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))\text{ (kv. v.)}.$$

5.7. Kreivės statiniai momentai. Masės centras



61 pav.

Materialiojo taško $A(x, y)$ (žr. 61 pav.) statiniais momentais M_x ir M_y ašių Ox ir Oy atžvilgiu vadinsime jo masės m ir atitinkamos taško koordinatės sandaugą:

$$M_x = my \text{ ir } M_y = mx.$$

Jeigu turime n materialiųjų taškų sistemą $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, kurių masės yra $m_1, m_2, \ldots, m_n$, tai jos statiniai momentai yra

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i,$$

Kreivė, kurios masės pasiskirstymo tankis ϱ yra pastovus, vadinama *vienalyte*.

Tarkime, kad funkcijos $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, grafikas yra vienalytė kreivė AB. Paprastumo dėlei imkime $\varrho = 1$. Tuomet kreivės masės skaitinis didumas lygus kreivės ilgiui:

$$m = l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Padaliję kreivę į elementarias dalis Δl_i ir jas susumavę, gautume statinius momentus:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i,$$

kurie yra funkcijų $y\sqrt{1 + y'^2}$ ir $x\sqrt{1 + y'^2}$ integralinės sumos. Taigi

$$\boxed{M_x = \int_a^b y\,dl = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}$$

ir

$$M_y=\int_a^b x\,dl=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Apibrėžimas. *Taškas, kuriame gali būti sukaupta visos sistemos masė ir kurio statinis momentas bet kurios ašies atžvilgiu lygus sistemos statiniam momentui tos ašies atžvilgiu, vadinamas masės centru.*

Pažymėkime masės centrą tašku $C(x_c, y_c)$ ir n taškų sistemos masę $\sum_{i=1}^{n} m_i=m$. Masės centro statinis momentas kurios nors ašies atžvilgiu sutampa su sistemos statiniu momentu tos ašies atžvilgiu. Todėl, turėdami galvoje, kad taško $C(x_c, y_c)$ atstumas nuo ašies Ox yra x_c, o nuo ašies Oy — y_c, galime rašyti:

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i=my_c, \qquad M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i=mx_c.$$

Iš šių lygybių randame

$$x_c=\frac{M_y}{m}, \qquad y_c=\frac{M_x}{m}.$$

Vietoje M_x, M_y ir m įrašę kreivės statinių momentų ir masės išraiškas, gauname jos svorio centro koordinates:

$$x_c=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}, \qquad y_c=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Pavyzdys. Raskime apskritimo $x^2+y^2=a^2$ dalies, esančios koordinačių sistemos pirmajame ketvirtyje, svorio centrą, kai $\varrho=1$.

Iš lygties $x^2+y^2=a^2$ randame $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Šią lygtį diferencijuojame:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Kreivės statinis momentas ašies Ox atžvilgiu yra

$$M_x=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_0^a a\,dx=ax\Big|_0^a=a^2.$$

Pirmojo ketvirčio apskritimo lanko ilgis yra

$$l=\frac{1}{4}2\pi a=\frac{\pi a}{2}.$$

Taigi lanko masė:

$$m=\frac{\pi a}{2}.$$

Skaičiuojame lanko masės centro ordinatę:

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}}=\frac{2a}{\pi}.$$

Kadangi apskritimo pirmojo ketvirčio lankas simetriškas šio ketvirčio pusiaukampinei, tai

$$x_c=y_c=\frac{2a}{\pi}.$$

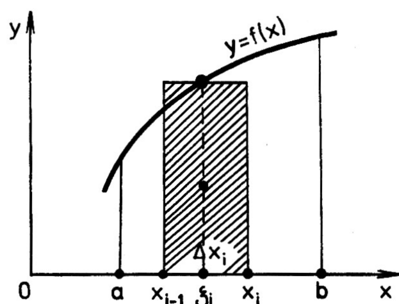
Taigi

$$C\left(\frac{2a}{\pi},\ \frac{2a}{\pi}\right).$$

5.8. Plokščiosios figūros statiniai momentai ir masės centras

Nagrinėkime kreivinę trapeciją, apribotą funkcijos $y=f(x)$, $x\in[a, b]$, grafiku, ašimi Ox ir tiesėmis $x=a$, $x=b$ (žr. 62 pav.).

Sakykime, kad šios figūros tankis yra pastovus, pvz. $\varrho=1$. Tuomet kreivinės trapecijos bet kurios dalies masė yra tokio pat



62 pav.

skaitinio dydžio kaip ir jos plotas. Užbrūkšniuotos juostelės (žr. 62 pav.) masė lygi jos plotui:

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Juostelės masės centras apytiksliai yra taške $\left(\xi_i, \frac{f(\xi_i)}{2}\right)$. Tuomet

$$\Delta M_{ix} = f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \frac{1}{2} f(\xi_i) = \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$\Delta M_{iy} = f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \xi_i = \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Sumuodami elementariuosius statinius momentus intervale $[a, b]$ ir imdami šios sumos ribą, gauname:

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx,$$

$$M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b xy dx.$$

Taigi

$$\boxed{M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx,} \qquad \boxed{M_y = \int_a^b xy dy.}$$

Pasinaudoję formulėmis $x_c = \frac{M_y}{m}$ ir $y_c = \frac{M_x}{m}$, gauname kreivinės trapecijos centro koordinates:

$$\boxed{x_c = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx},} \qquad \boxed{y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.}$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime figūros, apribotos kreive $y = 2\sqrt{x}$ ir tiesėmis $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$, masės centro koordinates.

Pasinaudoję išvestomis formulėmis, gauname

$$x_c = \frac{2\int_0^4 x\sqrt{x} dx}{2\int_0^4 \sqrt{x} dx} = \frac{\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}\Big|_0^4}{\frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x}\Big|_0^4} = 2{,}4;$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^4 4x\,dx}{2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx} = \frac{x^2\Big|_0^4}{\frac{4}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4} = 1{,}5.$$

2. Apskaičiuokime figūros, apribotos linijomis $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, masės centro koordinates.

Šios figūros masės centro abscisė randama šitaip:

$$x_c = \frac{\int_0^\pi x \sin x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx}.$$

Skaičiuojame integralą $\int_0^\pi x \sin x\,dx$. Pakeitę $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, randame $du=dx$, $v=-\cos x$. Remdamiesi formule $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$, skaičiuojame:

$$\int_0^\pi x \sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx =$$

$$= -(\pi\cos\pi - 0\cos 0) + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Masės centro abscisė yra

$$x_c = \frac{\pi}{-\cos x\Big|_0^\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Figūros masės centro ordinatė skaičiuojama taip:

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx}.$$

Randame trupmenos skaitiklio integralą:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Taigi figūros masės centro ordinatė yra

$$y_c=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{-\cos x\Big|_0^{\pi}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

Figūros masės centro koordinatės: $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$.

5.9. Inercijos momentai

Apibrėžimas. *Materialiojo taško inercijos momentu I kurios nors ašies atžvilgiu vadiname jo masės m ir atstumo iki ašies kvadrato r^2 sandaugą:*

$$I=mr^2.$$

N taškų inercijos momentas lygus tų taškų inercijos momentų sumai:

$$I=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2.$$

Tarkime, kad masė vienodu tankiu išdėstyta nagrinėjamoje figūroje. Imkime $\varrho=1$. Panašiai kaip 5.8 skyrelyje nesunku įsitikinti, kad inercijos momentų sumavimas visais atvejais keičiamas integravimu. Tuo tikslu parenkamas masės elementas dm, randamas elementarusis jo inercijos momentas $dI=r^2dm$ ir integruojant apskaičiuojamas visos masės inercijos momentas.

Imkime vienalytę kreivę ($\varrho=1$). Jos elementaraus ilgio masė lygi tos kreivės ilgiui dl, o inercijos momentas ašies Ox atžvilgiu yra y^2dl, t. y.

$$dI_x=y^2dl.$$

Suintegravę abi lygybės puses, gauname kreivės inercijos momentą ašies Ox atžvilgiu:

$$\boxed{I_x=\int_0^l y^2dl.}$$

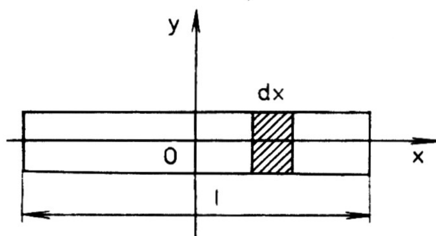
Analogiškai

$$\boxed{I_y=\int_0^l x^2dl.}$$

Kreivės inercijos momentas, skaičiuojamas koordinačių pradžios atžvilgiu, yra

$$I_0=\int_0^l (x^2+y^2)\,dl.$$

Pavyzdys. Apskaičiuokime ilgio l tiesaus vienalyčio strypo inercijos momentą atžvilgiu ašies, einančios per strypo vidurį. Strypo linijinis tankis (ilgio vieneto masė) yra ϱ.



63 pav.

Koordinačių sistemą taip parenkame, kad strypas būtų ašyje Ox, o ašis Oy eitų per to strypo vidurį (žr. 63 pav.). Strypo ilgio elemento dx, kurio atstumas nuo koordinačių pradžios yra x, masė lygi ϱdx. Šio elemento inercijos momentas yra $dI=\varrho x^2 dx$. Viso strypo inercijos momentas:

$$I=\varrho\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx=2\varrho\int_0^{\frac{l}{2}} x^2dx=2\varrho\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{\varrho l^3}{12}=\frac{ml^2}{12},$$

t. y.

$$I=\frac{\varrho}{12}l^2;$$

čia ϱl — strypo masė.

5.10. Kūno nueito atstumo skaičiavimas

Žinome, kad kintamojo judėjimo greitis yra laiko funkcija:

$$v=f(t).$$

Tarkime, kad kūnas juda greičiu v. Reikia apskaičiuoti atstu-

mą, kurį nueis kūnas per laikotarpį nuo t_0 iki T. Tuo tikslu intervalą $[t_0, T]$ dalijame į n dalinių intervalų

$$[t_0\ t_1],\ [t_1,\ t_2],\ \ldots,\ [t_{i-1},\ t_i],\ \ldots,\ [t_{n-1},\ T].$$

Jeigu dalinis intervalas pakankamai mažas, tai jame kūno greitis apytiksliai pastovus. Taip samprotaudami, atstumą, nueitą per laiką $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, galime užrašyti šitaip:

$$f(t_i)\Delta t_i.$$

Sudėję nueitus atstumus atskiruose intervaluose, gauname integralinę sumą

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i,$$

kuri apytiksliai išreiškia nueitą atstumą per laikotarpį nuo t_0 iki t_n:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i.$$

Jeigu intervalų skaičių taip didinsime, kad $\Delta t_i \to 0$, tai gausime tikslią nueito atstumo reikšmę

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i.$$

Gautosios lygybės dešinėje pusėje esančią ribą užrašome kaip apibrėžtinį integralą:

$$\boxed{s = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt.}$$

Pagal šią formulę apskaičiuojamas nueitas per tam tikrą laikotarpį kelias, kai žinoma greičio funkcija $v = f(t)$.

Pavyzdžiai. 1. Kūnas juda greičiu $v = \frac{1}{2}t^2 + 3$ (m/s). Kokį atstumą jis nueis per pirmąsias 6 s? Integravimo ribos: $t_0 = 0$, $T = 6$. Nueitas atstumas:

$$s = \int_0^6 \left(\frac{1}{2}t^2 + 3\right)dt = \left(\frac{t^3}{6} + 3t\right)\Big|_0^6 = \frac{216}{6} + 18 = 54 \text{ (m)}.$$

2. Kokį atstumą kūnas, išmestas greičiu v_0, kils vertikaliai į viršų. Oro pasipriešinimo nepaisykite.

Iš fizikos žinome, kad vertikaliai mesto kūno greitis yra $v(t)=v_0-gt$; čia g — laisvai krintančio kūno pagreitis. Kūnas kils į viršų tol, kol jo greitis bus $v(t)\geqslant 0$, t. y.

$$v_0-gt=0, \quad t=\frac{v_0}{g}.$$

Taigi kūno kilimo laikotarpis yra nuo $t=0$ iki $t=\frac{v_0}{g}$. Vadinasi,

$$s=\int_0^{\frac{v_0}{g}}(v_0-gt)\,dt=\left(v_0t-\frac{gt^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{v_0}{g}}=$$

$$=v_0\frac{v_0}{g}-\frac{g}{2}\cdot\frac{v_0^2}{g^2}=\frac{v_0^2}{g}-\frac{v_0^2}{2g}=\frac{2v_0^2-v_0^2}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}.$$

5.11. Jėgos darbas

Jeigu kokį nors kūną veikia pastovi jėga **F**, kurios kryptis sutampa su kūno judėjimo kryptimi, tai darbas, kurį atliks ta jėga atstume s, lygus

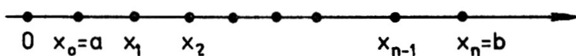
$$A=Fs.$$

Tarkime, kad kūnas juda tiese nuo taško $x=a$ iki taško $x=b$ veikiamas kintamos jėgos **F**, kuri yra x funkcija, t. y.

$$F=f(x).$$

Apskaičiuokime šios jėgos atliktą darbą intervale $[a, b]$. (žr. 64 pav.). Taškais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ intervalą $[a, b]$ dalijame į n dalių — dalinių intervalų

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$



64 pav.

Pakankamai mažame intervale $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ jėga apytiksliai yra pastovi:

$$F=f(x_i).$$

Taigi jėgos darbas intervale Δx_i apytiksliai išreiškiamas sandauga

$$f(x_i)\Delta x_i,$$

o visame intervale $[a, b]$ — suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Jeigu intervalo $[a, b]$ dalijimų skaičių taip didinsime, kad $n \to \infty$, tai ribiniu atveju, kai $\Delta x_i \to 0$,

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

arba

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Pavyzdžiai. 1. 0,01 m ilgio spyruoklei suspausti reikia 10 N jėgos. Apskaičiuokite jėgos atliktą darbą suspaudžiant spyruoklę 0,04 m.

Pagal Huko* dėsnį jėga yra proporcinga spyruoklės ištempimui arba suspaudimui, t. y. $F = kx$, x — suspaudimo arba ištempimo ilgis, k — proporcingumo koeficientas, kuris apskaičiuojamas įrašius duomenis į Huko dėsnio formulę $F = kx$:

$$10 = k \cdot 0{,}01, \qquad k = 1000.$$

Šią reikšmę įrašę į Huko formulės išraišką gauname

$$F = 1000x, \text{ t. y. } f(x) = 1000x.$$

Pasinaudoję jėgos atlikto darbo formule $A = \int_a^b f(x)\,dx$ ir paėmę integravimo rėžius $a = 0$, $b = 0{,}04$, skaičiuojame:

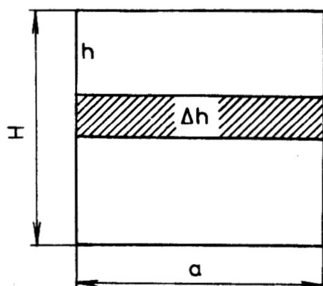
$$A = \int_0^{0{,}04} 1000x\,dx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ J}.$$

2. Spyruoklės ilgis 20 cm. 10 kg masės kūnas ištempia ją 2 cm. Apskaičiuokime darbą, kurį reikia atlikti ištempiant spyruoklę nuo 25 cm iki 35 cm. Duomenis išreiškiame SI sistemoje: 2 cm = = 0,02 m, 20 cm = 0,2 m, $F = 98{,}1$ N, 25 cm = 0,25 m ir 35 cm = = 0,35 m. Pasinaudoję Huko dėsniu, turime: 98,1 N $= k \cdot 0{,}02$ m, $k = 4905$. Taigi $F = 4905x$. Skaičiuojame integravimo ribas: $a =$ $= 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}05$; $b = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$. Skaičiuojame darbą:

$$A = 4905\int_{0{,}05}^{0{,}15} x\,dx = 4905\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}05}^{0{,}15} \approx 49{,}1 \text{ J}.$$

* Hooke Robert (1635—1703) — anglų fizikas.

5.12. Skysčio slėgis



65 pav.

Tarkime, kad stačiakampio gretasienio formos baseinas pripildytas vandens. Apskaičiuokime vandens slėgį į baseino sieną, kurios aukštis yra H, o pagrindo ilgis a (žr. 65 pav.). Padaliję aukštinę į n pakankamai mažų dalių, išskiriame vieną, kurios aukštis yra Δh. Žinome, kad vienas kubinis metras vandens sveria 1 toną. Vandens stulpo, kurio aukštis h_i ir skerspjūvio plotas 1 m^2, slėgis lygus $1 \cdot h_i t = h_i t$. Vandens slėgis į užbrūkšniuotą elementą, kuris yra gylyje h_i, lygus

$$h_i a \Delta h.$$

Vandens slėgis į vieną baseino sieną apytiksliai lygus sumai

$$\sum_{i=1}^{n} a h_i \Delta h.$$

Baseino aukščio dalijimų skaičiui n artėjant prie ∞, $\Delta h \to 0$. Ribiniu atveju

$$P = \lim_{\Delta h \to 0} \sum_{i=1}^{n} a h_i \Delta h = a \int_0^H h\,dh = a \left.\frac{h^2}{2}\right|_0^H = \frac{aH^2}{2};$$

$$P = \frac{aH^2}{2}.$$

Jeigu kokią nors ploto S plokštelę panardinsime į skystį, kurio specifinis svoris ϱ, tai, remdamiesi Paskalio dėsniu, slėgį į tą plokštelę gylyje h galime užrašyti šitaip:

$$P = 9{,}807 \varrho S h \,(\mathrm{N});$$

čia $9{,}807 = g$ — laisvai krintančio kūno pagreitis. Jeigu plokštelė panardinta į skystį vertikaliai, tai slėgis į ją priklauso nuo aukščio. Tarkime, kad ašis Oy sutampa su skysčio paviršiumi, o ašis Ox

nukreipta žemyn (žr. 66 pav.). Intervalą $[a, b]$ taškais $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ padalykime į n dalių ir per dalijimo taškus nubrėžkime tieses, lygiagretes skysčio paviršiui. Tokiu būdu intervalas $[a, b]$ bus padalytas į dalinius intervalus $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$.

Išskiriame vieną juostelę (užbrūkšniuotą), kurios ilgis apytiksliai lygus $f(\xi_i)$, o plotis Δx_i. Jos plotas apytiksliai lygus stačiakampio plotui:

$$\Delta S_i f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Pagal Paskalio dėsnį skysčio slėgis į minėtąją juostelę apytiksliai lygus

$$f(\xi_i)\Delta x_i\cdot\xi_i\varrho.$$

Slėgio jėga į visą plokštelę lygi slėgių į atskiras juosteles sumai

$$P\approx\sum_{i=1}^{n}\varrho\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i.$$

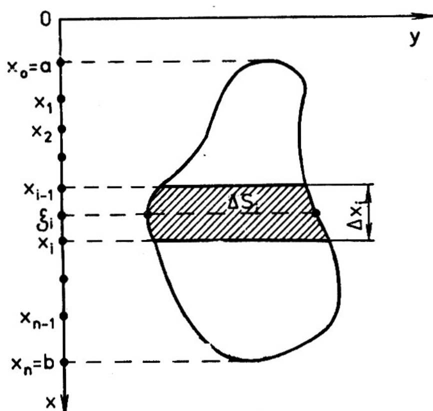
Juostelių skaičių taip didinant, kad $n\to\infty$, jų pločiai artės prie nulio ($\Delta x_i\to 0$). Ribiniu atveju

$$P=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varrho\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i,$$

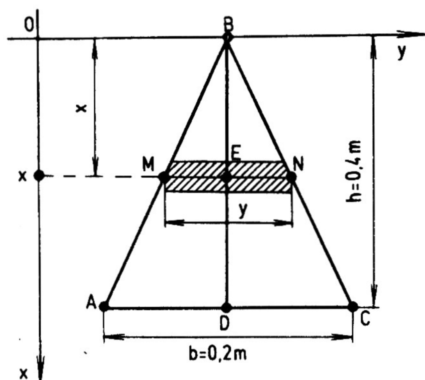
arba

$$\boxed{P=\int_a^b\varrho x f(x)\,dx=\varrho\int_a^b xy\,dx.}$$

Pavyzdys. Vandenyje vertikaliai panardinta trikampio formos plokštelė ABC (žr. 67 pav.), kurios viršūnė B yra vandens pa-



66 pav.



67 pav.

viršiuje, o pagrindas b lygiagretus vandens paviršiui. Apskaičiuokime slėgio jėgą į šią plokštelę, kai $b=0{,}2$ m, $h=0{,}4$ m. Tarkime, kad $MN=y$ yra plokštelės plotis gylyje $x(BE)$. Iš trikampių MBN ir ABC panašumo išplaukia, kad

$$\frac{MN}{AC}=\frac{BE}{BD}, \text{ arba } \frac{y}{0{,}2}=\frac{x}{0{,}4}, \quad y=\frac{1}{2}x.$$

Kadangi $g\approx 9{,}807$ m/s^2, $\varrho=1000$ kg/m^3, tai

$$P=9{,}807\cdot 1000\int_0^{0{,}4} x\frac{1}{2}x\,dx=4903{,}5\int_0^{0{,}4} x^2dx=4903{,}5\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0{,}4}=$$
$$=1634{,}5\cdot(0{,}4)^3\approx 104{,}6 \text{ (N)}.$$

5.13. Pratimai

Raskite figūrų plotus, apribotus linijomis:

1. $y=4x-5$, $x=-3$, $x=-2$, $y=0$;
2. $y^2=16x$, $x=1$, $x=4$;
3. $y=2x-x^2$, $y=0$;
4. $y^2=4x$, $x=4$, $x=9$;
5. $y=x^3$, $y=2x$;
6. $y=x^2$, $x+y=2$;
7. $y=\cos x$, $y=0$ nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$;
8. $y^2=4x$, $x^2=4y$;
9. $x^2=y+3$, $x^2=\frac{3}{2}y$;
10. $y=(x+1)(3-x)$, $y=0$;
11. $y=\frac{1}{2}x^2$, $x-y+4=0$;
12. $y=(x+2)^2$, $2x-y+4=0$;
13. $2x-x^2-y=0$, $y=0$;
14. $y=x^2-2x+1$, $2x-y-2=0$;
15. $y^2=9x$, $y=x$;
16. $y=2x^3$, $y=4x$;
17. $xy=8$, $x=2$, $x=8$;
18. $y^2=16x$, $x^2=2y$;
19. $y^2=9x$, $3x-4y+9=0$;
20. $x^2-4x-2y+6=0$, $2x-y-3=0$;
21. $2y^2-9x+18=0$, $y^2+3x-21=0$;
22. $y=x^2$, $y=1-x^2$;
23. $y=4-x^2$, $x-y+2=0$;
24. $x-y-5=0$, $2x-3y-6=0$, $y=0$.

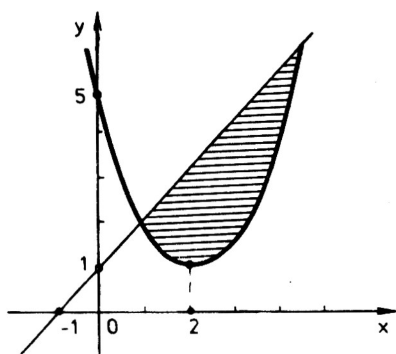
25. Raskite 68—74 paveiksluose užbrūkšniuotų figūrų, apribotų tiesėmis ir parabolėmis, plotus.

26. Raskite tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Ox figūrą, apribotą šiomis linijomis:

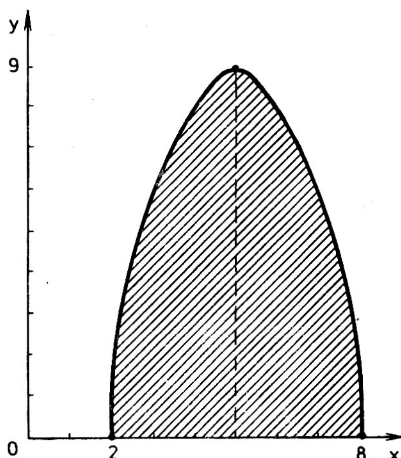
1) $y=2x-x^2$, $y=0$;
2) $2x-3y-6=0$, $x-3=0$, $x-9=0$, $y=0$;
3) $2y-x-3=0$, $x=0$, $x-5=0$, $y=0$;
4) $y=\frac{1}{3}x^2$, $x=0$, $y=0$, $x-3=0$;
5) $2y+x^2-12=0$, $x=0$, $x=3$, $y=0$;
6) $y=x^3$, $x=1$, $y=0$;
7) $y^2=2(x+4)$, $x=0$;

9. Užsak. Nr. 284.

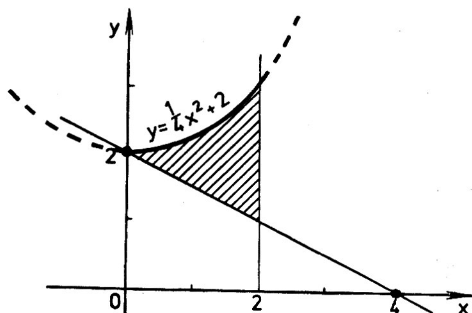
8) $x^2=9-y,\ y=0$;
9) $y^2=8x,\ y=x^2$;
10) $y^2=4x,\ y=x$;
11) $y^2=4x,\ x^2=4y$;
12) $y=x^2,\ 4x-y=0$;
13) $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$;
14) $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ x=-1,\ x=1,\ y=0$;
15) $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi$;
16) $y=4-x^2,\ x-y+2=0$;
17) $y=x^2,\ x+y=2$;
18) $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$;
19) $y=\operatorname{tg} x,\ x=-\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{\pi}{4}$.



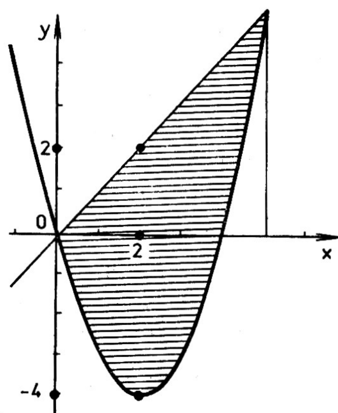
68 pav.



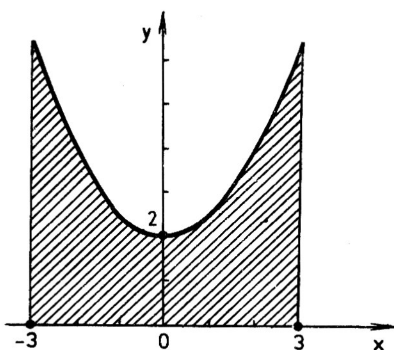
69 pav.



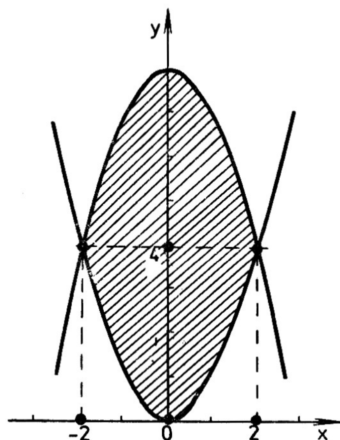
70 pav.



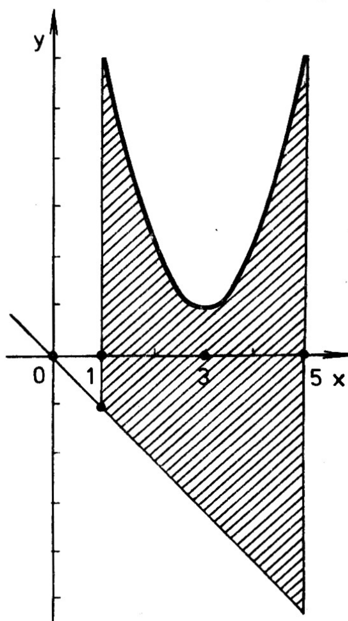
71 pav.



72 pav.



73 pav.



74 pav.

27. Raskite tūrį kūno, gauto sukant apie ašį Oy figūrą, apribotą linijomis:

1) $y=x^2+1$, $y=2$, $y=5$.
2) $y=3-\frac{1}{3}x^2$, $y=2$, $y=0$;
3) $x^2-2y=0$, $y-2=0$;
4) $y=\frac{1}{x}$, $y=1$, $y=4$, $x=0$;
5) $y=2x$, $y=x^3$;
6) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$;
7) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{1}{2}$;
8) $y^2=4x$, $y=4$, $x=0$;
9) $y=x^2$, $y=x$;
10) $y^2=9x$, $y=3x$;
11) $y=4-\frac{1}{4}x^2$, $y=0$;
12) $y=\ln x$, $y=2$, $y=0$, $x=0$;

28. Kūnas juda tiesiai greičiu $V(t)=2t^2+1$ m/s. Raskite jo nueitą atstumą per 5 pirmąsias sekundes.

29. Kūnas juda tiesiai greičiu $V(t)=2t^3+1$ m/s. Raskite jo nueitą atstumą per antrąją ir trečiąją sekundes.

30. Kūnas juda tiesiai greičiu $V(t)=12t-3t^2$ m/s. Raskite jo nueitą atstumą nuo judėjimo pradžios iki pabaigos.

31. Iš vienos vietovės tuo pačiu laiku du kūnai pradėjo judėti tiese greičiais $V_1=6t^2+4t$ m/s ir $V_2=4t$ m/s. Po kiek sekundžių tarp jų bus 250 m atstumas?

32. Kūnas juda greičiu $V(t)=t^2-4t+3$. Raskite jo judėjimo dėsnį, jeigu žinoma, kad $S=1$ m, kai $t=0$.

33. Taškas juda greičiu $V(t)=3t^2-2t-3$ m/s. Raskite atstumą, nueitą per 4 sekundes.

34. Kūnas juda tiesiai greičiu $V(t)=18t-6t^2$ m/s. Raskite jo nueitą atstumą nuo judėjimo pradžios iki pabaigos.

35. Raskite lygtį kreivės, einančios per koordinačių pradžią, jeigu kiekviename jos taške liestinės krypties koeficientas lygus $2x$.

36. Raskite lygtį kreivės, einančios per tašką (2, 1), jeigu jos liestinės krypties koeficientas kiekviename taške lygus x.

37. Apskaičiuokite jėgos darbą, atliktą suspaudžiant spyruoklę 0,04 m, jeigu žinoma, kad tai pačiai spyruoklei suspausti 0,01 m reikia 10 N jėgos.

38. Apskaičiuokite jėgos darbą, atliktą suspaudžiant spyruoklę 25 cm, jeigu žinoma, kad tai pačiai spyruoklei suspausti 1 cm reikia 40 N jėgos.

39. 80 N jėga spyruoklė ištempiama 2 cm. Pradinis spyruoklės ilgis lygus 15 cm. Kokį darbą reikia atlikti ištempiant spyruoklę iki 20 cm?

40. Apskaičiuokite vandens slėgį į stačiakampio gretasienio formos akvariumo sieneles ir dugną, jeigu jo pagrindo kraštinės lygios 0,9 ir 0,6 m, o aukštinė — 0,4 cm. Akvariumas pilnas vandens.

41. Lygiašonės trapecijos formos plokštelė vertikaliai panardinta į vandenį tiek, kad jos mažesnysis pagrindas yra vandens paviršiuje. Apskaičiuokite vandens slėgį į tą plokštelę, jeigu trapecijos pagrindai lygūs 1 m ir 7 m, o aukštis lygus 2 m.

42. Apskaičiuokite masės centrą vienalyčio pusapskritimio $x^2+y^2=25$, esančio virš ašies Ox $(y\geqslant 0)$.

43. Apskaičiuokite masės centrą figūros, apribotos linijomis $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

44. Apskaičiuokite masės centrą figūros, apribotos linijomis $y=4-x^2$, $y=0$.

5.14. Atsakymai

1. 15. **2.** $18\frac{2}{3}$. **3.** $\frac{4}{3}$. **4.** $25\frac{1}{3}$. **5.** 2. **6.** 4,5. **7.** 1. **8.** $5\frac{1}{3}$. **9.** 12. **10.** $\frac{32}{3}$. **11.** 18. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** $1\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{4}{3}$. **15.** $13\frac{1}{2}$. **16.** 4. **17.** $16\ln 2$. **18.** $10\frac{2}{3}$. **19.** 4. **20.** $5\frac{1}{3}$. **21.** 20. **22.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **23.** 4,5. **24.** 4. **25.** 1) 4,5; 2) 36; 3) $1\frac{2}{3}$; 4) $20\frac{5}{6}$; 5) 21; 6) $21\frac{1}{3}$; 7) $21\frac{1}{3}$. **26.** 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) 32π; 3) $40\frac{5}{12}\pi$; 4) $5{,}4\pi$; 5) $66{,}15\pi$; 6) $\frac{1}{7}\pi$; 7) 16π; 8) $259{,}2\pi$; 9) $9{,}6\pi$; 10) $10\frac{2}{3}\pi$; 11) $19{,}2\pi$;

12) $136\frac{8}{15}\pi$; 13) 12π; 14) $\frac{\pi+2}{4}\pi$; 15) $\frac{\pi^2}{2}$; 16) $21\frac{3}{5}\pi$; 17) $\frac{72\pi}{5}$; 18) $\frac{\pi}{2}$;

27. 1) $7{,}5\pi$; 2) 12π; 3) 4π; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{16}{15}\sqrt{2}\pi$; 6) $\frac{32}{5}\pi$; 7) $(\ln 2-0{,}5)\pi$; 8) $\frac{64}{5}\pi$; 9) $\frac{\pi}{6}$; 10) $0{,}4\pi$; 11) 32π; 12) $\frac{\pi}{2}(e^4-1)$. **28.** $\frac{265}{3}$ m. **29.** 42 m. **30.** 32 m. **31.** 5 s. **32.** $s=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+1$. **33.** 36 m. **34.** 27 m. **35.** $y=x^2$. **36.** $y=\frac{1}{2}x^2-1$. **37.** 0,8. **38.** 125 Dž. **39.** 5 Dž. **40.** 4470 N. **41.** ≈ 98100 N. **42.** $\left(0, \frac{10}{\pi}\right)$. **43.** $\left(\frac{\pi-2}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$. **44.** $\left(0, 1\frac{3}{5}\right)$.

6. PLOKŠTUMA, TIESĖ IR PAVIRŠIUS ERDVĖJE

6.1. Plokštumos lygtis

Pirmojoje vadovėlio dalyje susipažinome su plokštumos tiesių ir antrosios eilės kreivių lygtimis. Šiame skyriuje nagrinėsime erdvės, kurioje apibrėžta Dekarto stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$, paviršius ir jų sankirtas.

Paviršiumi vadinsime aibę erdvės taškų, kurių koordinatės tenkina lygtį

$$F(x, y, z)=0. \tag{1}$$

Plačiau nagrinėsime tik pirmojo laipsnio lygtis

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

ir antrojo laipsnio lygtis

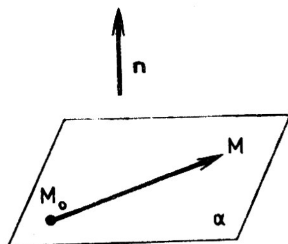
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{00}=0. \tag{3}$$

Teorema. *Kiekviena erdvės plokštuma aprašoma pirmojo laipsnio* (2) *lygtimi.*

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: *bet kuri pirmojo laipsnio lygtis, jei bent vienas iš koeficientų A, B, C nelygus nuliui, apibrėžia plokštumą.*

Įrodymas. Sakykime, taškas $M(x_0, y_0, z_0)$ priklauso plokštumai α ir vektorius $\mathbf{n}=(A, B, C)$ yra statmenas šiai plokštumai (75 pav.). Tuomet taškas $M(x, y, z)$ priklausys plokštumai α tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ bus statmenas vektoriui $\mathbf{n}$, t. y. šių vektorių skaliarinė sandauga bus lygi nuliui:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\mathbf{n}=0, \tag{4}$$



75 pav.

arba

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (5)$$

Jeigu taško $M(x, y, z)$ koordinatės tenkina (5) lygtį, tai galioja (4) lygybė; vadinasi, šis taškas priklauso plokštumai α. Taigi (5) lygtis yra plokštumos, einančios per tašką M_0 ir statmenos vektoriui **n**, lygtis. Šią lygtį galime perrašyti šitaip:

$$Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0=0,$$

arba

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0;} \qquad (5')$$

čia $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Vektorius $\mathbf{n}=(A, B, C)$ vadinamas *plokštumos* α *normalės vektoriumi*, o 2 lygtis — *bendrąja plokštumos lygtimi*.

Ištirsime plokštumos α padėtį koordinačių sistemos atžvilgiu.

1. Kai $D=0$, plokštuma α eina per koordinačių pradžią, nes lygtį $Ax+By+Cz=0$ tenkina taško $O(0, 0, 0)$ koordinatės.

2. Kai $A=0$, lygtis

$$By+Cz+D=0 \qquad (6)$$

apibrėžia plokštumą, lygiagrečią ašiai Ox, nes vektorius $\mathbf{n}=(0, B, C)$ yra statmenas ašiai Ox.

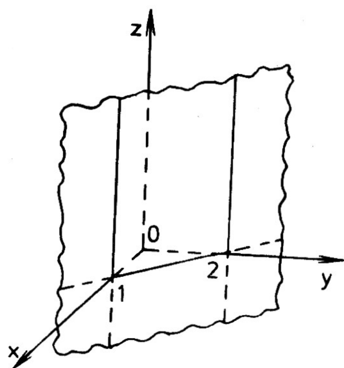
Analogiškai, kai $B=0$, lygtis

$$Ax+Cy+D=0 \qquad (7)$$

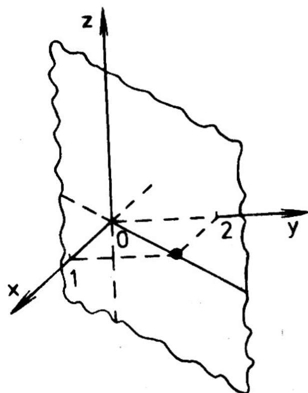
apibrėžia plokštumą, lygiagrečią ašiai Oy ir, kai $C=0$, lygtis

$$Ax+By+D=0 \qquad (8)$$

apibrėžia plokštumą, lygiagrečią ašiai Oz.



76 pav.



77 pav.

76 paveiksle pavaizduota lygiagreti ašiai Oz plokštuma, kurios lygtis yra $2x+y-2=0$.

3. Kai $A=D=0$, plokštuma

$$By+Cz=0 \tag{9}$$

eina per ašį Ox (ji lygiagreti ašiai Ox ir eina per tašką $O(0,\ 0,\ 0)$).

Panašiai plokštuma

$$Ax+Cz=0\ \ (B=D=0) \tag{10}$$

eina per ašį Oy, o plokštuma

$$Ax+By=0\ \ (C=D=0) \tag{11}$$

— per ašį Oz.

77 paveiksle pavaizduota plokštuma $2x-y=0$, kuri eina per ašį Oz.

4. Kai $A=B=0$, lygtis

$$Cz+D=0 \tag{12}$$

apibrėžia plokštumą, lygiagrečią plokštumai xOy (ta plokštuma lygiagreti ašiai Ox $(A=0)$ ir ašiai Oy $(B=0)$).

Plokštuma

$$Ax+D=0\ \ (B=C=0) \tag{13}$$

lygiagreti plokštumai yOz, o plokštuma

$$By+D=0\ \ (A=C=0) \tag{14}$$

lygiagreti plokštumai xOz.

78 paveiksle pavaizduota plokštuma, kurios lygtis yra $2z-5=0$.

Pavyzdžiai. 1. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per tašką $M_0(-1, 2, 0)$ ir statmenos vektoriui $\mathbf{n}=(3, 4, -1)$.

Pagal (5) formulę

$$3\cdot(x+1)+4\cdot(y-2)-1\cdot(z-0)=0,$$

arba

$$3x+4y-z-5=0.$$

2. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per ašį Ox ir tašką $M_0(-1, 2, 5)$.

Ieškosime $By+Cz=0$ pavidalo plokštumos lygties. Kadangi taškas M_0 priklauso šiai plokštumai, tai jo koordinatės tenkina ieškomąją lygtį:

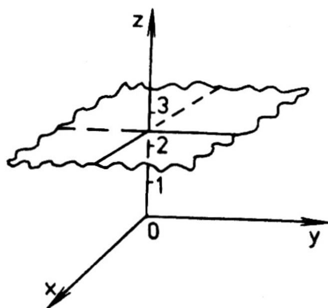
$$B\cdot 2+C\cdot 5=0.$$

Iš čia $B=-\frac{5}{2}C$. Rastąją B reikšmę įrašę į lygtį $By+Cz=0$, gauname

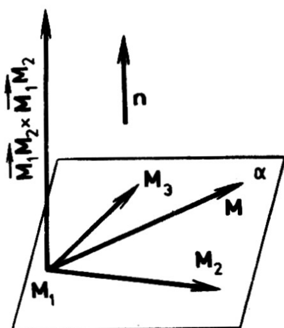
$$-\frac{5}{2}\cdot Cy+Cz=0,$$

arba

$$5y-2z=0.$$



78 pav.



79 pav.

6.2. Plokštumos, einančios per tris taškus, lygtis. Ašinė plokštumos lygtis

Sudarysime lygtį plokštumos α, einančios per tris taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ir $M_3(x_3, y_3, z_3)$, nesančius vienoje tiesėje (79 pav.).

Vektoriai $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M_3}$ nekolinearūs, jie priklauso ieškomajai plokštumai, todėl plokštumos normalės vektorius **n** yra kolinearus vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$. Taškas $M(x, y, z)$ priklausys plokštumai tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_1M}$ bus statmenas vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$, t. y. kai bus

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0. \qquad (1)$$

Kadangi $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}$,

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},$$

tai

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=((x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k})\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=((x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k})\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)=$$

$$=(x-x_1)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}-$$

$$-(y-y_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.} \qquad (2)$$

(2) lygtis ir yra ieškomosios plokštumos, einančios per tris duotuosius taškus, lygtis.

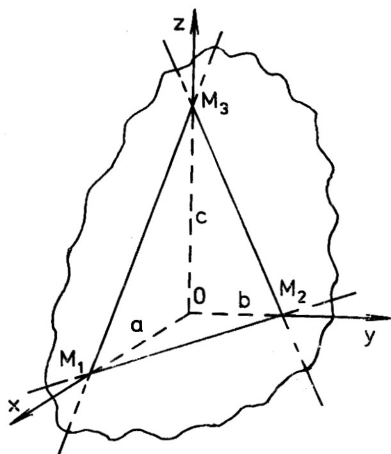
Pavyzdys. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per taškus $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(1, -2, 1)$ ir $M_3(-2, 1, 3)$.

Į (2) lygtį įrašę tų taškų koordinates, gauname

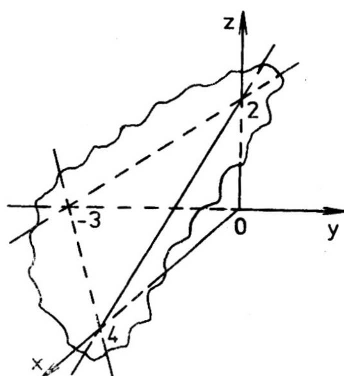
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

arba

$$x-3y+6z-13=0.$$



80 pav.



81 pav.

Remdamiesi (2) formule, parašysime lygtį plokštumos, einančios per tris taškus $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ ir $M_3(0, 0, c)$, esančius koordinačių ašyse (80 pav.).

Šiuo atveju plokštumos lygtis yra

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

arba

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \qquad (3)$$

(3) lygtis vadinama *ašine plokštumos lygtimi.* Joje nurodyti atkarpų, kurias plokštuma atkerta koordinačių ašyse, ilgiai:

$$OM_1=|a|, \quad OM_2=|b|, \quad OM_3=|c|.$$

Ašinė plokštumos lygtis nesunkiai gaunama iš bendrosios plokštumos lygties, kurios visi koeficientai nelygūs nuliui. Pavyzdžiui, lygties

$$-3x+4y-6z+12=0$$

laisvąjį narį perkėlę į dešiniąją pusę ir lygtį padaliję iš -12, gauname ašinę plokštumos lygtį

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1.$$

Ši plokštuma pavaizduota 81 paveiksle.

6.3. Dviejų plokštumų tarpusavio padėtys. Kampas tarp dviejų plokštumų

Jeigu dvi plokštumos α_1 ir α_2 duotos bendrosiomis lygtimis

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

ir

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

tai tų plokštumų normalių vektoriai atitinkamai yra $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ ir $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$. Kadangi vektorius $\mathbf{n}_1$ statmenas plokštumai α_1, o vektorius $\mathbf{n}_2$ statmenas plokštumai α_2, tai plokštumų α_1 ir α_2 tarpusavio padėtį visiškai apibūdina vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$.

Plokštumos α_1 *ir* α_2 *yra lygiagrečios* tada ir tik tada, kai vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ yra kolinearūs (82 pav.), t. y. kai:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.} \qquad (1)$$

Kad *plokštumos* α_1 *ir* α_2 *būtų statmenos,* būtina ir pakanka, kad vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ būtų statmeni (83 pav.), t. y. kad būtų

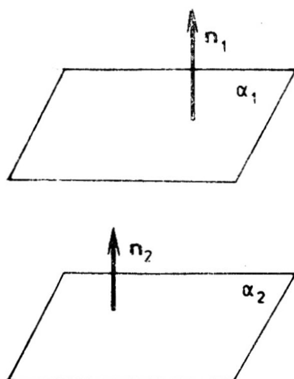
$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0,$$

arba

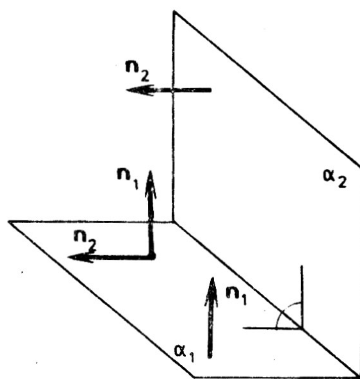
$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.} \qquad (2)$$

Kampu φ *tarp dviejų plokštumų* α_1 ir α_2 vadinsime kampą tarp tų plokštumų normalių vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$. Taigi

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.} \qquad (3)$$



82 pav.



83 pav.

Pavyzdžiai. 1. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per tašką $M_0(0, 1, 0)$ ir lygiagrečios plokštumai $2x+3y-4z+5=0$.

Duotosios plokštumos normalės vektorius $\mathbf{n}=(2, 3, -4)$ bus ir ieškomosios plokštumos normalės vektorius. Todėl šios plokštumos lygtis, remiantis 6.1 skyrelio (5) formule, yra:

$$2(x-0)+3(y-1)-4(z-0)=0,$$

arba

$$2x+3y-4z-3=0.$$

2. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per taškus $M_1(3, -2, 1)$, $M_2(1, 5, 3)$ ir statmenos plokštumai $x-3y+4z-15=0$.

1 b ū d a s. Sakykime, ieškomosios plokštumos normalės vektorius yra $\mathbf{n}=(A, B, C)$. Kadangi ši plokštuma eina per tašką M_1, tai jos lygtis pagal 6.1 skyrelio (5) formulę yra

$$A(x-3)+B(y+2)+C(z-1)=0. \qquad (4)$$

Taškas M_2 taip pat priklauso ieškomajai plokštumai, todėl jo koordinatės turi tenkinti (4) lygtį, t. y.

$$A(1-3)+B(5+2)+C(3-1)=0,$$

arba

$$-2A+7B+2C=0.$$

Kitą lygtį, siejančią koeficientus A, B ir C, gausime iš duotosios ir ieškomosios plokštumų statmenumo (2) sąlygos:

$$A-3B+4C=0.$$

Sistemą

$$\begin{cases} 2A-7B-2C=0, \\ A-3B+4C=0 \end{cases}$$

pertvarkome

$$\begin{cases} 2\frac{A}{C}-7\frac{B}{C}=2, \\ \frac{A}{C}-3\frac{B}{C}=-4 \end{cases}$$

ir randame

$$\frac{A}{C}=-34, \quad \frac{B}{C}=-10.$$

Iš čia

$$A=-34C, \quad B=-10C.$$

A ir B reikšmes įrašome į (4) lygtį:

$$-34C(x-3)-10C(y+2)+C(z-1)=0.$$

Šią lygtį padaliję iš $-C\neq 0$ ir atlikę veiksmus, gauname

$$34x+10y-z-81=0.$$

2 būdas. Sakykime, $M(x, y, z)$ — bet kuris ieškomosios plokštumos taškas. Tada vektoriai $\overrightarrow{M_1M}=(x-3,\ y+2,\ z-1)$ ir $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,\ 7,\ 2)$ priklauso tai plokštumai ir jos normalės vektorius yra $\mathbf{n}=\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2}$. Kadangi duotoji plokštuma, kurios normalės vektorius yra $\mathbf{n}_1=(1,\ -3,\ 4)$, ir ieškomoji plokštuma yra statmenos, tai

$$\mathbf{n}_1\cdot(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})=0$$

arba, remiantis 6.2 skyrelio (2) formule,

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Iš čia randame plokštumos lygtį:

$$34x+10y-z-81=0.$$

3. Apskaičiuosime kampą tarp plokštumų $x+2y-2z-6=0$ ir $3x+3y-11=0$.

Kadangi $\mathbf{n}_1=(1,\ 2,\ -2)$ ir $\mathbf{n}_2=(3,\ 3,\ 0)$, tai pagal (3) formulę

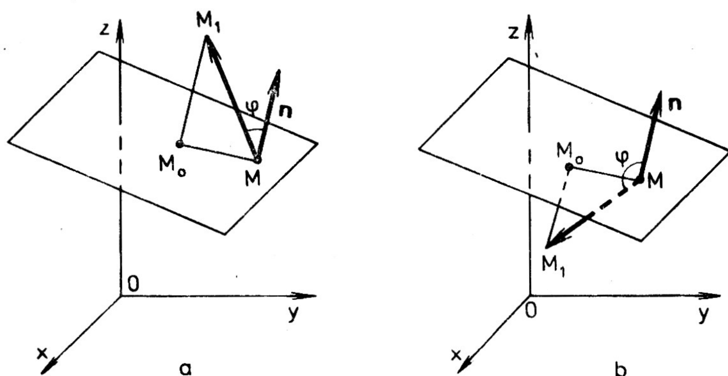
$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 3+2\cdot 3+(-2)\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+0^2}}=\frac{9}{3\sqrt{18}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \varphi=45^0.$$

6.4. Taško atstumas iki plokštumos

Ieškosime taško $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ atstumo iki plokštumos $Ax+$ $+By+Cz+D=0$.

Sakykime, M_0 — statmens, nuleisto iš taško M_1 į plokštumą, pagrindas, o $M(x, y, z)$ — bet kuris plokštumos taškas (84 pav.). 84 paveiksle, *a*, taškas M_1 ir koordinačių pradžia yra skirtingose plokštumos pusėse, o 84 paveiksle, *b*,— vienoje pusėje. Pirmuoju atveju kampas φ tarp vektorių $\overrightarrow{MM_1}$ ir $\mathbf{n}$ yra smailus, o antruoju atveju — bukas. Abiem atvejais

$$\overrightarrow{MM_1}\cdot\mathbf{n}=|\overrightarrow{MM_1}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos\varphi,$$



84 pav.

arba

$$|\overrightarrow{MM_1}\cdot\mathbf{n}| = |\overrightarrow{MM_1}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot|\cos\varphi|.$$

Tačiau

$$|\overrightarrow{MM_1}|\cdot|\cos\varphi| = d = |M_0M_1|,$$

todėl

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax-By-Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (1)$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime taško $M(1, -2, 5)$ atstumą iki plokštumos $x-2y-2z+3=0$.

Remdamiesi (1) formule, gauname:

$$d = \frac{|1\cdot 1-2\cdot(-2)-2\cdot 5+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{|1+4-10+3|}{3} = \frac{2}{3}.$$

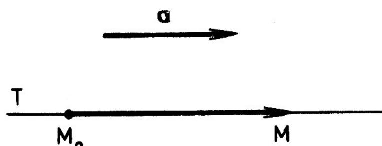
2. Rasime atstumą tarp lygiagrečių plokštumų $2x-2y+z-8=$ $=0$ ir $2x-2y+z+12=0$.

Pirmojoje plokštumoje pasirenkame bet kurį tašką, pavyzdžiui, $M(4, 0, 0)$, ir ieškome to taško atstumo iki antrosios plokštumos:

$$d = \frac{|2\cdot 4-2\cdot 0+1\cdot 0+12|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{20}{3}.$$

6.5. Kanoninės ir parametrinės tiesės lygtys

Tiesės padėtis erdvėje yra nustatyta, jeigu žinoma jos kryptis ir taškas, esantis tiesėje. Tiesės kryptis gali būti nusakyta vektoriumi, lygiagrečiu tiesei. Tas vektorius vadinamas *tiesės krypties vektoriumi.*



85 pav.

Sudarysime tiesės T, kuri eina per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir kurios krypties vektorius yra $\mathbf{a} = (l, m, n)$, lygtis (85 pav.). Taškas $M(x, y, z)$ priklausys tiesei T tada ir tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ bus kolinearus vektoriui $\mathbf{a} = (l, m, n)$, t. y. kai

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.} \tag{1}$$

(1) lygtys vadinamos *tiesės kanoninėmis lygtimis.*

Jeigu vienas ar du iš skaičių l, m, n, pavyzdžiui, l ar l ir m, lygūs nuliui, tai (1) lygtis suprasime kaip sistemą

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

ar sistemą

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

Jeigu (1) lygtyse pažymėsime

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t,$$

tai iš čia gausime tiesės T *parametrines lygtis:*

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}} \tag{2}$$

Pavyzdžiai. 1. Sudarysime lygtį tiesės, kuri eina per tašką $M(-2, 1, 3)$ ir kurios krypties vektorius yra $\mathbf{a}=(5, 3, 2)$.

Pagal (1) formules šios tiesės kanoninės lygtys yra

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}.$$

2. Sudarysime lygtis tiesės, kuri eina per tašką $M(-1, 2, -3)$ ir kurios krypties vektorius yra $\mathbf{a}=(3, 0, -2)$.

Šiuo atveju tiesės lygtys yra:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{-2},$$

arba

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{z+3}{-2}, \\ y-2=0. \end{cases}$$

3. Sudarysime lygtis tiesės, einančios per tašką $M(1, 5, -2)$ ir lygiagrečios ašiai Ox.

Ašies Ox krypties vektorius $\mathbf{a}=(1, 0, 0)$, todėl ieškomosios tiesės lygtys yra

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{0}=\frac{z+2}{0},$$

arba

$$\begin{cases} y-5=0, \\ z+2=0. \end{cases}$$

6.6. Tiesės, einančios per du taškus, lygtys

Tiesė erdvėje gali būti nusakyta dviem jai priklausančiais taškais. Sakykime, taškai $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$ priklauso tiesei T (86 pav.). Šios tiesės krypties vektorius yra $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Kadangi tiesė T eina per tašką M_1 ir žinomas jos krypties vektorius, tai, remdamiesi 6.5 skyrelio (1) formule, galime parašyti jos lygtis:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.} \qquad (1)$$



86 pav.

Pavyzdys. Užrašysime lygtį tiesės, einančios per taškus $M_1(-1, -2, 4)$ ir $M_2(3, 4, -1)$.

Pagal (1) formulę tos tiesės lygtys yra

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y+2}{4+2}=\frac{z-4}{-1-4},$$

arba

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-4}{-5}.$$

6.7. Tiesė — dviejų plokštumų sankirta

Dvi plokštumos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ir $A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0$, jeigu jos nėra lygiagrečios, kertasi tiese. Sudarysime šios tiesės kanonines lygtis.

Kadangi tiesė priklauso abiem plokštumoms, tai jos krypties vektorius yra statmenas vektoriams $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1\ C_1)$ ir $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$. Vadinasi,

$$\mathbf{a}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Laisvai pasirinkę vieno kintamojo reikšmę, pavyzdžiui, $z=z_1$, iš sistemos

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-D_1-C_1z_1,\\ A_2x+B_2y=-D_2-C_2z_1\end{cases}$$

randame x ir y reikšmes. Vadinasi, radome šios tiesės vieno taško $M_1(x_1, y_1, z_1)$ koordinates. Tiesės, kuri eina per tašką M_1 ir kurios krypties vektorius $\mathbf{a}$, kanoninės lygtys yra

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.} \qquad (1)$$

Pavyzdys. Parašysime tiesės

$$\begin{cases}x-3y-z-4=0,\\ 3x+2y-2z-1=0\end{cases}$$

kanonines lygtis.

Paėmę $z=0$, iš sistemos randame $x=1$, $y=-1$. Taigi radome tiesės tašką $M_1(1, -1, 0)$. Remdamiesi (1) formule, gauname

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{y+1}{-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}=\frac{z-0}{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}},$$

arba

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{11}.$$

6.8. Kampas tarp tiesių

Kampu tarp tiesių

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

ir

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

vadinsime kampą tarp tų tiesių krypčių vektorių $\mathbf{a}_1=(l_1,\ m_1,\ n_1)$ ir $\mathbf{a}_2=(l_2,\ m_2,\ n_2)$.

Taigi

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.} \qquad (1)$$

Tiesės yra statmenos, jeigu vektoriai $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ yra statmeni, t. y. jei

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=0,$$

arba

$$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.} \qquad (2)$$

Tiesės yra lygiagrečios, kai vektoriai $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ yra kolinearūs, t. y. kai

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.} \qquad (3)$$

Pavyzdžiai. 1. Ištirsime, ar statmenos šios tiesės:

a) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-5}{-2}$ ir $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-0{,}4}{-2}=\dfrac{z}{-1}$;

b) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-3}\\ z-3=0\end{cases}$ ir $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+16}{13}$.

a) kadangi $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=4\cdot1+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)=0$, tai tiesės yra statmenos;

b) pirmosios tiesės lygtį užrašome kanoniniu pavidalu:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{0}.$$

Šiuo atveju $\mathbf{a}_1=(3, -3, 0)$, $\mathbf{a}_2=(5, 2, 13)$ ir $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=3\cdot5+$ $+(-3)\cdot2+0\cdot13\neq0$, vadinasi, tiesės nėra statmenos.

2. Sudarysime lygtis tiesės, einančios per tašką $M(-1, 4, 2)$ ir lygiagrečios tiesei $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$.

Kadangi abi tiesės yra lygiagrečios, tai duotosios tiesės krypties vektorius $\mathbf{a}=(3, 4, -2)$ yra ir ieškomosios tiesės krypties vektorius. Todėl pagal 6.5 skyrelio (1) formules

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-2}{-2}.$$

3. Rasime tiesės $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ kampų, kuriuos ji sudaro su koordinačių ašimis, kosinusus.

Kadangi tiesės krypties vektorius yra $\mathbf{a}=(l, m, n)$, o ašies Ox vienetinis krypties vektorius yra $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, tai kampo α tarp jų kosinusas

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot l+0\cdot m+0\cdot n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Panašiai randame kampo β tarp tiesės ir ašies Oy ir kampo γ tarp tiesės ir ašies Oz kosinusus:

$$\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

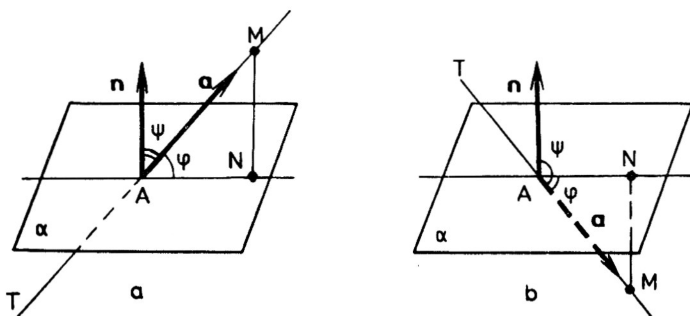
Atkreipsime dėmesį, kad

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right)=$$
$$=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \qquad (4)$$

6.9. Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Sakykime, α yra plokštuma, T — tiesė, kertanti plokštumą taške A, N — iš bet kurio tiesės taško M išvesto plokštumai α statmens pagrindas (87 pav.). Tiesė AN vadinama *tiesės T projekcija plokštumoje* α.

Kampu tarp tiesės $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ *ir plokštumos* $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ vadinsime kampą φ tarp tos tiesės ir jos projekcijos plokštumoje.



87 pav.

Jeigu ψ yra kampas tarp $\mathbf{n}=(A, B, C)$ ir $\mathbf{a}=(l, m, n)$, tai $\varphi=90°-\psi$, kai $\psi\leqslant 90°$ (87 pav., *a*), ir $\varphi=\psi-90°$, kai $\psi>90°$ (87 pav., *b*). Abiem atvejais

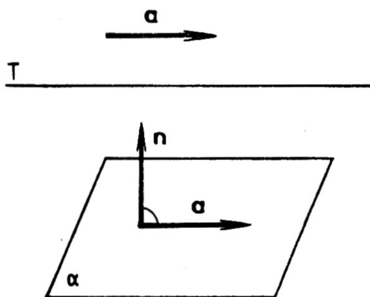
$$\boxed{\sin\varphi=|\cos\psi|=\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{a}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.} \quad (1)$$

Tiesė T lygiagreti plokštumai α, jei vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{n}$ yra statmeni (88 pav.), t. y. jei

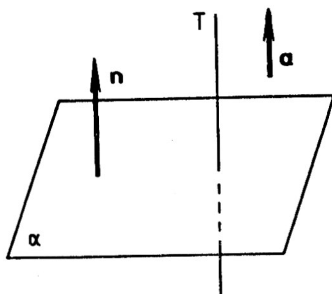
$$\boxed{Al+Bm+Cn=0.} \quad (2)$$

Tiesė T statmena plokštumai α, kai vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{n}$ yra kolinearūs (89 pav.), t. y. kai

$$\boxed{\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.} \quad (3)$$



88 pav.



89 pav.

Jeigu tiesė nelygiagreti plokštumai, tai ji šią plokštumą kerta viename taške. Norint rasti to taško koordinates, reikia tiesės lygtį užrašyti parametrine forma ir išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime kampą tarp plokštumos $4x-3y+z-5=0$ ir tiesės $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{3}$.

Pagal (1) formulę randame to kampo sinusą:

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot1-3\cdot4+1\cdot3|}{\sqrt{1^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+1^2}}=\frac{5}{26};\ \varphi=\arcsin\frac{5}{26}=11{,}09°.$$

2. Sudarysime lygtį plokštumos, einančios per tašką $M(4, -2, 1)$ statmenai tiesei $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{5}$.

Ieškomosios plokštumos normalės vektorius $\mathbf{n}$ kolinearus tiesės krypties vektoriui $\mathbf{a}=(2, -1, 5)$. Todėl šios plokštumos lygtis yra

$$2(x-4)+(-1)(y+2)+5(z-1)=0,$$

arba

$$2x-y+5z-15=0.$$

3. Rasime plokštumos $2x-3y+z-14=0$ ir tiesės $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ susikirtimo tašką.

Plokštumos ir tiesės susikirtimo taško koordinates rasime išsprendę sistemą

$$\begin{cases} x=2t-1, \\ y=4t+3, \\ z=3t, \\ 2x-3y+z-14=0. \end{cases}$$

Iš pirmųjų trijų lygčių x, y, z išraiškas įrašę į ketvirtąją lygtį, gauname

$$2(2t-1)-3(4t+3)+3t-14=0.$$

Iš čia $t=-5$, ir iš pirmųjų trijų lygčių randame $x=-11$, $y=-17$, $z=-15$. Taigi tiesė ir plokštuma kertasi taške $M(-11, -17, -15)$.

4. Rasime taško $M(3, 1, -1)$ projekciją į plokštumą $x+2y+3z-30=0$.

Taško M projekcija į plokštumą yra statmens į šią plokštumą, einančio per tašką M, susikirtimo su plokštuma taškas. Statmens lygtis yra

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} x=t+3, \\ y=2t+1, \\ z=3t-1, \\ x+2y+3z-30=0, \end{cases}$$

gauname

$$t=2,\ x=5,\ y=5,\ z=5.$$

Taigi taško $M(3,\ 1,\ -1)$ projekcija į plokštumą $x+2y+3z-30=0$ yra taškas $N(5,\ 5,\ 5)$.

6.10. Antrosios eilės paviršiai

6.1 skyrelyje įrodėme, kad erdvėje, kurioje parinkta stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$, trijų kintamųjų pirmojo laipsnio (2) lygtis reiškia plokštumą.

Šiame skyrelyje nagrinėsime trijų kintamųjų antrojo laipsnio lygties

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{00}=0$$

atskirus atvejus.

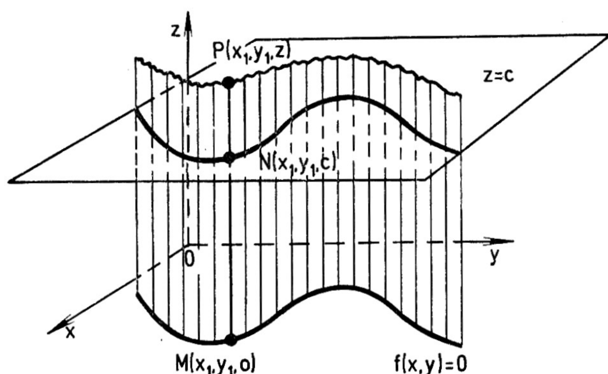
6.10.1. Cilindriniai paviršiai. Lygtis

$$f(x,\ y)=0 \qquad (1)$$

plokštumoje xOy apibrėžia kreivę. Ką reiškia tokia lygtis erdvėje? Jeigu taškas $(x_1,\ y_1,\ 0)$ tenkina (1) lygtį, tai ir visi taškai $(x_1,\ y_1,\ z)$, kai $z\in R$, taip pat tenkina tą lygtį. Erdvės taškai $(x_1,\ y_1,\ z)$, kai $z\in R$, priklauso tiesei

$$\begin{cases} x=x_1, \\ y=y_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Vadinasi, (1) lygtimi erdvėje apibrėžiamas paviršius, kuriam priklauso (2) tiesė. Toks paviršius vadinamas *cilindriniu.* Kai taškas $(x_1,\ y_1,\ 0)$ plokštumoje xOy „aprašo“ kreivę, (2) tiesė aprašo cilindrinį paviršių, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (90 pav.).



90 pav.

Jeigu cilindrinį paviršių kirsime plokštuma $z=c$, tai sankirtoje gausime kreivę

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ z=c. \end{cases} \tag{3}$$

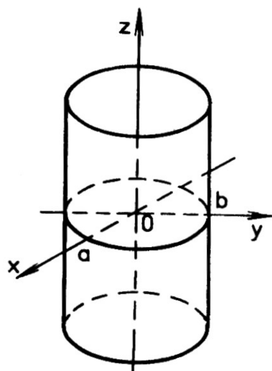
Kai plokštumos xOy kreivė yra antrosios eilės, cilindrinis paviršius vadinamas *antrosios eilės cilindriniu paviršiumi.*

Panašiai galime apibrėžti cilindrinius paviršius, kurių sudaromosios lygiagrečios ašiai Oy ar Ox.

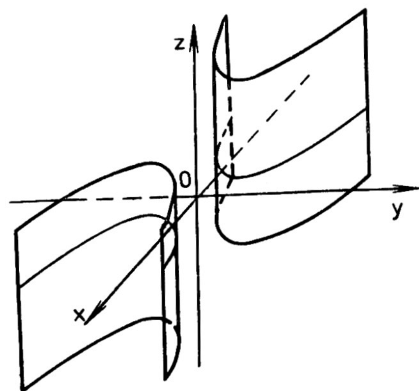
Pavyzdžiai. 1. Lygtis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

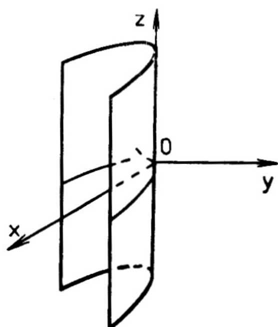
erdvėje reiškia elipsinį cilindrą, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (91 pav.).



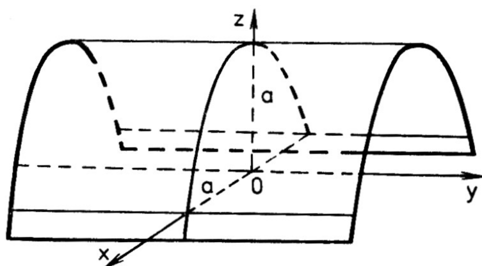
91 pav.



92 pav.



93 pav.



94 pav.

2. Lygtis

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

erdvėje apibrėžia hiperbolinį cilindrą, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (92 pav.).

3. Lygtimi

$$y^2=2px \quad (p>0) \tag{6}$$

erdvėje apibrėžiamas parabolinis cilindras, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (93 pav.).

4. Lygtimi

$$z=a^2-x^2 \tag{7}$$

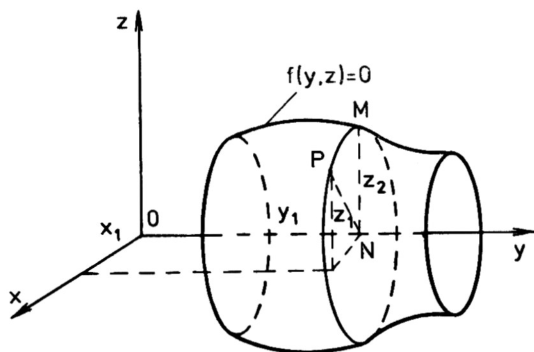
erdvėje apibrėžiamas parabolinis cilindras, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oy (94 pav.).

6.10.2. Sukimosi paviršiai. Sudarysime lygtį paviršiaus, gauto sukant kreivę

$$\begin{cases} f(y, z)=0, \\ x=0, \quad z\geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

apie ašį Oy (95 pav.).

Jeigu taškas $P(x_1, y_1, z_1)$ priklauso paviršiui, tai plokštuma, einanti per taką P statmenai ašiai Oy, šią ašį kerta taške $N(0, y_1, 0)$, paviršių kerta apskritimu, kurio centras yra taške N, o (8) kreivę — taške $M(0, y_1, z_2)$. 94 paveiksle matome, kad $MN=$



95 pav.

$=PN$ ir $MN=z_2$. Vadinasi, $PN=z_2$. Kita vertus, $PN=\sqrt{x_1^2+z_1^2}$, todėl $z_2=\sqrt{x_1^2+z_1^2}$. Bet taškas M priklauso (8) kreivei, todėl

$$f(y_1, z_2)=f(y_1,\sqrt{x_1^2+z_1^2})=0.$$

Iš čia išplaukia, kad taškas $P(x_1, y_1, z_1)$ priklauso sukimosi paviršiui, kai jo koordinatės tenkina lygtį

$$\boxed{f(y, \sqrt{x^2+z^2})=0.} \tag{9}$$

Sugretinę (8) ir (9) lygtis, galime suformuluoti taisyklę sukimosi paviršiaus lygčiai gauti.

Jeigu (8) *kreivė sukama apie ašį Oy, tai sukimosi paviršiaus lygtis gaunama iš lygties* $f(y, z)=0$, *kurioje kintamasis z pakeistas išraiška* $\sqrt{x^2+z^2}$.

Analogiškai samprotaudami įsitikiname, kad: *sukant kreivę*

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ z=0, \ y\geqslant 0 \end{cases}$$

apie ašį Ox, gauto sukimosi paviršiaus lygtis yra

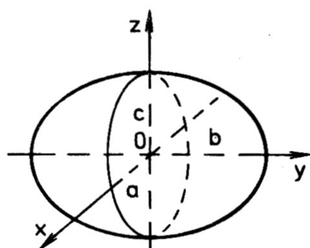
$$\boxed{f(x, \sqrt{y^2+z^2})=0,} \tag{10}$$

o sukant kreivę

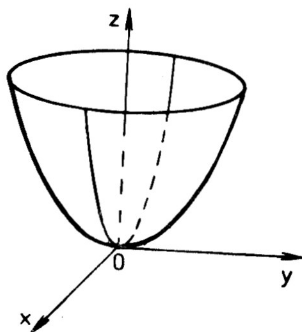
$$\begin{cases} f(z, x)=0, \\ y=0, \ x\geqslant 0 \end{cases}$$

apie ašį Oz, gauto sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\boxed{f(z,\sqrt{x^2+y^2})=0.} \tag{11}$$



96 pav.



97 pav.

Pavyzdžiai. 1. Elipsę

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

sukdami apie ašį Oy, gauname sukimosi paviršių, kurio lygtis yra

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1. \quad (12)$$

Šis paviršius vadinamas *sukimosi elipsoidu* (96 pav.).

2. Parabolę

$$\begin{cases} pz=y^2, \\ x=0 \end{cases}$$

sukdami apie ašį Oz, gauname sukimosi paviršių, kurio lygtis yra

$$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}. \quad (13)$$

Šis paviršius vadinamas *sukimosi paraboloidu* (97 pav.).

3. Hiperbolę

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

sukdami apie ašį Oz, *gauname vienašakį sukimosi hiperboloidą* (98 pav., *a*), kurio lygtis yra

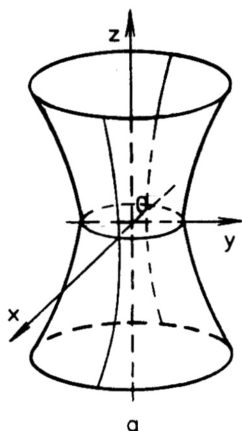
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (14)$$

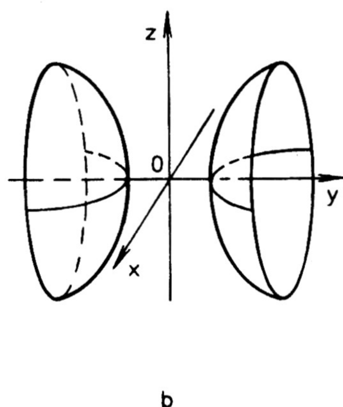
o šią hiperbolę sukdami apie ašį Oy, gauname *dvišakį sukimosi hiperboloidą* (98 pav., *b*), kurio lygtis yra

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1. \quad (15)$$

4. Tiesę

$$\begin{cases} \frac{z}{c}=\frac{y}{b}, \\ x=0 \end{cases}$$





98 pav.

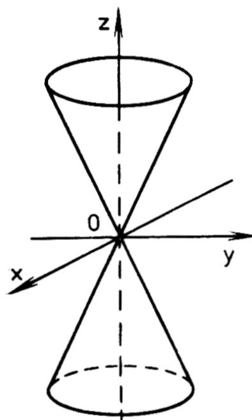
sukdami apie ašį Oz, gauname sukimosi kūgį (99 pav.), kurio lygtis yra

$$\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}, \text{ arba } \frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2}{b^2}. \quad (16)$$

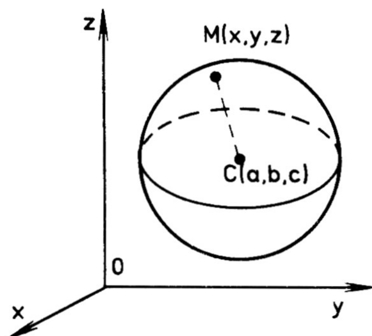
6.10.3. Antrosios eilės paviršiai. Vienas iš antrosios eilės paviršių yra *sfera.* Ją sudaro visi erdvės taškai, nutolę atstumu r nuo duotojo taško — *sferos centro.* Atstumas r vadinamas sferos *spinduliu.*

Sakykime, sferos centras yra $C(a, b, c)$, o jos spindulys r. Taškas $M(x, y, z)$ (100 pav.) priklauso sferai tik tada, kai

$$CM=r,$$



99 pav.



100 pav.

t. y. kai

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

arba

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.} \tag{17}$$

Kai $a=b=c=0$, sferos centras yra koordinačių pradžioje $O(0, 0, 0)$ ir jos lygtis —

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=r^2.} \tag{18}$$

Jeigu sukimosi elipsoido lygties

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

pirmajame naryje c^2 pakeisime $a^2 \neq c^2$, tai gausime bendresnę lygtį

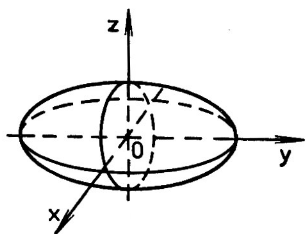
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,} \tag{19}$$

kuri vadinama *triašio elipsoido*, arba tiesiog elipsoido, lygtimi. Šį paviršių kirsdami koordinačių plokštumomis, pjūviuose gausime elipses (101 pav.):

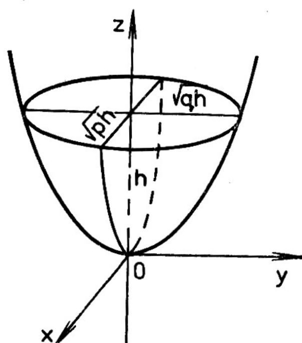
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Panašiai (16) lygtyje koeficientą $\frac{1}{p}$ prie y^2 pakeitę koeficientu $\frac{1}{q} \neq \frac{1}{p}$, gauname bendresnę *elipsinio paraboloido lygtį:*

$$\boxed{z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}.} \tag{20}$$



101 pav.



102 pav.

Kirsdami šį paviršių plokštumomis $x=0$ ir $y=0$, pjūviuose atitinkamai gauname paraboles:

$$\begin{cases} z=\dfrac{y^2}{q}, \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{p}, \\ y=0. \end{cases}$$

Kirsdami elipsinį paraboloidą plokštumomis $z=h$ $(h>0)$, pjūviuose gausime elipses (102 pav.):

$$\frac{x^2}{(\sqrt{ph})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{qh})^2}=1.$$

(14) lygtyje koeficientą $\frac{1}{b^2}$ prie x^2 pakeitę koeficientu $\frac{1}{a^2}$, gauname bendresnę *vienašakio hiperboloido lygtį:*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,} \tag{21}$$

o (15) lygtyje koeficientą $\frac{1}{c^2}$ prie x^2 pakeitę koeficientu $\frac{1}{a^2}\neq\frac{1}{c^2}$, gauname *dvišakio hiperboloido lygtį:*

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.} \tag{22}$$

Vienašakį hiperboloidą kirsdami plokštumomis $x=0$, $y=0$, $z=0$, pjūviuose atitinkamai gauname hiperboles

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

ir elipsę

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

(103 pav.).

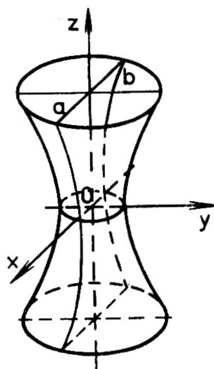
Dvišakį hiperboloidą kirsdami plokštumomis $x=0$ ir $z=0$, pjūviuose atitinkamai gausime hiperboles

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

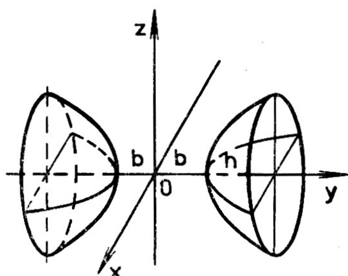
Šį hiperboloidą kirsdami plokštumomis $y=h$, pjūviuose gauname kreives

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{b^2}-1.$$

Kai $|h|>b$, pjūviuose gauname elipses; kai $|h|=b$ — tašką $(0, h, 0)$; kai $|h|<b$, plokštumos $y=h$ hiperboloido nekerta (104 pav.).



103 pav.



104 pav.

(16) lygtyje koeficientą $\frac{1}{b^2}$ prie x^2 pakeitę koeficientu $\frac{1}{a^2}$, gausime elipsinio kūgio lygtį

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.} \tag{23}$$

Plokštumos $x=0$ ir $y=0$ šį kūgį kerta tiesėmis

$$\begin{cases} y=\pm\frac{b}{c}z, \\ x=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x=\pm\frac{a}{c}z, \\ y=0. \end{cases}$$

o plokštumos $z=h$ $(h>0)$ — elipsėmis

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$$

(105 pav.).

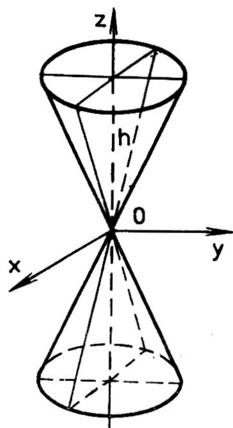
Kai $h=0$, pjūvis yra taškas $O(0, 0, 0)$.

106 paveiksle pavaizduotas *hiberbolinis paraboloidas*, kurio lygtis yra

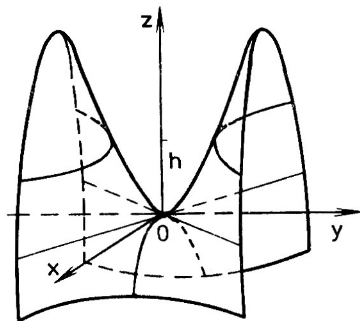
$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=z.} \tag{23}$$

Plokštumos $x=0$ ir $y=0$ šį paviršių atitinkamai kerta parabolėmis

$$\begin{cases} z=\frac{y^2}{b^2}, \\ x=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} z=-\frac{x^2}{a^2}, \\ y=0. \end{cases}$$



105 pav.



106 pav.

Plokštumos $z=h$ $(h>0)$ hiperbolinį paraboloidą kerta hiperbolėmis

$$\frac{y^2}{(\sqrt{h}b)^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{h}a)^2}=1,$$

o plokštumos $z=h$ $(h<0)$ — hiperbolėmis

$$\frac{x^2}{(\sqrt{-h}a)^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{-h}b)^2}=1.$$

Plokštuma $z=0$ šį paviršių kerta dviem tiesėmis:

$$\begin{cases} y=\pm\frac{b}{a}x, \\ z=0. \end{cases}$$

6.11. Pratimai

1. Nubraižykite plokštumas, aprašytas lygtimis: 1) $x-3y+2z-6=0$. 2) $2x+4y-3z-12=0$, 3) $6x+2y-3z+6=0$, 4) $x+2y+4z+4=0$, 5) $x+2z-4=0$, 6) $2y-3z+6=0$, 7) $3x-2y-6=0$, 8) $2x+7=0$, 9) $2y-5=0$, 10) $z+9=0$.

2. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M statmenai vektoriui $\mathbf{n}$, kai: 1) $M(1, 2, -5)$, $\mathbf{n}=(2, 3, 0)$; 2) $M(-4, 3, 2)$, $\mathbf{n}=(2, -1, 3)$, 3) $M(3, 1, 0)$, $\mathbf{n}=(-1, 0, 4)$; 4) $M(1, 2, -3)$, $\mathbf{n}=(0, 0, 1)$; 5) $M(3, 0, 0)$, $\mathbf{n}=\overrightarrow{MN}$; $N(3, 1, 2)$.

3. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per: 1) ašį Ox ir tašką $M(10, -1, -3)$; 2) ašį Oy ir tašką $M(1, -3, 2)$; 3) ašį Oz ir tašką $M(2, 4, -1)$.

4. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tris taškus M_1, M_2 ir M_3, kai: 1) $M_1(-1, 3, 2)$, $M_2(2, -3, 0)$, $M_3(0, 3, -1)$; 2) $M_1(2, 0, 1)$, $M_2(3, 1, -2)$, $M_3(0, -3, -1)$; 3) $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(1, 3, 2)$, $M_3(-2, -1, 4)$.

5. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M lygiagrečiai plokštumai α, kai: 1) $M(1, -1, 2)$, α: $3x-4y+z-5=0$; 2) $M(2, 0, -3)$, α: $2x+3y+4=0$; 3) $M(0, 2, 0)$, α: $3y-4z-5=0$; 4) $M(3, -1, -8)$, α: $z=0$.

6. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per taškus M_1, M_2 statmenai plokštumai α, kai: 1) $M_1(8, -3, 1)$, $M_2(4, 7, 2)$, α: $3x+5y-7z-21=0$; 2) $M_1(0, -1, 0)$, $M_2(2, 0, 0)$, α: $2x+5y+z-10=0$; 3) $M_1(1, -2, 0)$, $M_2(0, 1, -1)$, α: $x-y=0$; 4) $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(-1, 2, 0)$, α: $y=0$.

7. Raskite kampą tarp plokštumų: 1) $x-z=0$ ir $y-z=0$; 2) $x+y=0$ ir $y+z=0$; 3) $2x-3y+z-2=0$ ir $4x+3y+z+5=0$; 4) $x+2y-2z+5=0$ ir $x+y-3=0$; 5) $x-\sqrt{2}y+z+4=0$ ir $z=0$.

8. Raskite taško M atstumą iki plokštumos α, kai: 1) $M(-1, 1, 1)$, α: $x-2y+2z-8=0$; 2) $M(0, 0, 0)$, α: $4x-y+5z-5\sqrt{42}=0$; 3) $M(1, 5, -1)$, α: $x-4y+2z=0$.

9. Raskite taško M atstumą iki plokštumos, einančios per taškus M_1, M_2 ir M_3, kai: 1) $M(0, 3, 4)$, $M_1(0, 3, 1)$, $M_2(2, -1, 4)$, $M_3(1, 0, 3)$; 2) $M(0, -1, 0)$, $M_1(1, 4, -5)$, $M_2(1, 3, 5)$, $M_3(-2, 4, -5)$.

10. Raskite atstumą tarp lygiagrečių plokštumų: 1) $2x-y+2z-8=0$ ir $2x-y+2z+13=0$; 2) $x+3y-5=0$ ir $x+3y+11=0$.

11. Sudarykite lygtis tiesės, einančios per tašką M lygiagrečiai vektoriui $\mathbf{n}$, kai: 1) $M(1, -2, 5)$, $\mathbf{n}=(3, -1, 7)$; 2) $M(0, 3, 0)$, $\mathbf{n}=(1, 0, -2)$.

12. Sudarykite lygtis tiesės, einančios per du taškus: 1) $M_1(-1, 3, 2)$ ir $M_2(3, 5, -4)$; 2) $M_1(2, -3, 5)$ ir $M_2(2, 1, -3)$; 3) $M_1(2, -1, 4)$ ir $M_2(-1, -1, 4)$.

13. Sudarykite tiesės, apibrėžtos dviejų plokštumų sankirta, kanonines lygtis:

1) $\begin{cases} x-2y-z-4=0, \\ 2x+y-z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+z=0, \\ y-z=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y-1=0, \\ y+z-3=0. \end{cases}$

14. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M(-1, 2, 3)$ lygiagrečiai tiesei

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

15. Sudarykite lygtis tiesės, einančios per tašką $M(3, 0, -1)$ lygiagrečiai tiesei

$$\begin{cases} 3x-4y+z-5=0, \\ x-2z+1=0. \end{cases}$$

16. Ar statmenos šios tiesės:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-2}$ ir $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$;

2) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$ ir $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y+z-1=0; \end{cases}$

3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{3}$ ir $\begin{cases} x+y+3=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$

17. Ar lygiagrečios šios tiesės:

1) $\begin{cases} x=5+3t, \\ y=-1+2t, \\ z=3-4t \end{cases}$ ir $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-4}$;

2) $\begin{cases} 2x-y-7=0, \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ ir $\begin{cases} 3x-2y+8=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$

18. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką M statmenai plokštumai α, kai: 1) $M(0, 1, -3)$, α: $2x-3y+z-5=0$; 2) $M(2, 1, -1)$, α: $3x-4y+1=0$.

19. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M statmenai tiesei T, kai:

1) $M(0, 0, 3)$, T: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{1}$;

2) $M(-1, 4, 2)$, T: $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=-2-t, \\ z=5t. \end{cases}$

20. Raskite kampą tarp tiesės ir plokštumos:

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ ir $2x+y-z+3=0$,

2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ ir $3x+2y-z-5=0$;

3) $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-3+2t, \\ z=-t-5 \end{cases}$ ir $y-z+10=0$;

4) $\begin{cases} 3x-y-1=, \\ 3x-2z-2=0 \end{cases}$ ir $2x+y+z-4=0$.

21. Su kuria l reikšme tiesė

$$\begin{cases} x=2-lt, \\ y=-3+4t, \\ z=4-9t \end{cases}$$

yra lygiagreti plokštumai $7x-3y+8z-12=0$?

22. Su kuriomis A ir n reikšmėmis tiesė

$$\frac{x-4}{-4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{n}$$

statmena plokštumai $Ax-6y+8z+15=0$?

23. Raskite plokštumos ir tiesės susikirtimo taško koordinates:

1) $x-2y+5z-3=0$ ir $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$;

2) $3x-4y+5=0$ ir $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{3}$;

3) $z=0$ ir $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-6}{2}$.

24. Raskite taško M projekciją plokštumoje α, kai:

1) $M(3, -6, 7)$, α: $x+4y-8z-4=0$; 2) $M(4, 3, -1)$, α: $2x-5z+16=0$.

25. Raskite plokštumos α atžvilgiu taškui M simetriško taško N koordinates, kai:

1) $M(-3, 1, -9)$, α: $4x-3y-z-7=0$; 2) $M(-1, 0, 2)$, α: $4y-z+19=0$.

26. Raskite sferos centro koordinates ir spindulį:

1) $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=16$ 2) $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=32$;
3) $x^2+y^2+z^2+4y-2z-4=0$; 4) $x^2+y^2+z^2+8x-4y+2z-79=0$.

27. Sudarykite lygtis paviršių, gautų hiperbolę

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

sukant apie: a) ašį Ox; b) ašį Oz. Nubraižykite sukinius.

28. Sudarykite lygtis paviršių, gautų elipsę

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

sukant apie: a) ašį Ox; b) ašį Oy. Nubraižykite sukinius.

29. Sudarykite lygtį paviršiaus, gauto parabolę

$$\begin{cases} y=x^2, \\ z=0 \end{cases}$$

sukant apie ašį Oy. Nubraižykite sukinį.

30. Sudarykite lygtį paviršiaus, gauto parabolę

$$\begin{cases} x=y^2, \\ z=0 \end{cases}$$

sukant apie ašį Ox. Nubraižykite tą paviršių.

31. Sudarykite lygtis paviršių, gautų tiesę

$$\begin{cases} y=x, \\ z=0 \end{cases}$$

sukant apie: a) ašį Ox; b) ašį Oy. Nubraižykite tuos sukinius.

32. Raskite paviršiaus $4z=x^2+y^2$ susikirtimo su pateiktomis plokštumomis linijas:

a) $x-2=0$; b) $y-1=0$; c) $z=4$.

33. Raskite paviršiaus $100x^2+225y^2-36z^2=0$ susikirtimo su plokštumomis linijas:

a) $x-1=0$; b) $y+2=0$; c) $z-3=0$.

34. Raskite paviršiaus

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$$

susikirtimo su pateiktomis plokštumomis linijų lygtis:

a) $x=2$; b) $y+3=0$; c) $z+2=0$.

35. Raskite paviršiaus

$$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{15}-\frac{z^2}{10}=1$$

susikirtimo su šiomis plokštumomis linijų lygtis:

a) $x-7=0$; b) $y-1=0$; c) $z+2=0$.

36. Nustatykite, kokio tipo yra paviršius (remkitės pjūviais koordinačių plokštumomis):

1) $3x^2+2y^2+4z^2-12=0$; 2) $3x^2+4y^2-24z^2=0$;
3) $x^2-4y=0$; 4) $z^2=4y-1$; 5) $10x^2+5y^2-2z^2-50=0$;
6) $4x^2-3y^2-2z^2-12=0$; 7) $z=9-x^2-y^2$; 8) $4z^2+5y^2-40=0$;
9) $2y^2+z^2-16x=0$; 10) $2x^2+3y^2-12z^2=0$;
11) $5y^2-4z^2-40=0$; 12) $4x^2-3y^2-12z^2=0$.

6.12. Atsakymai

2. 1) $2x+3y-8=0$; 2) $2x-y+3z+5=0$; 3) $x-4z-3=0$; 4) $z+3=0$; 5) $y+2z=0$. **3.** 1) $3y-z=0$; 2) $2x-z=0$; 3) $2x-y=0$. **4.** 1) $18x+7y+6z-15=0$; 2) $11x-8y+z-23=0$; 3) $2x+2y+7z-22=0$. **5.** 1) $3x-4y+z-9=0$; 2) $2x+3y-4=0$; 3) $3y-4z-6=0$; 4) $z+8=0$. **6.** 1) $3x+y+2z-23=0$; 2) $x-2y+8z-2=0$; 3) $x+y+2z+1=0$; 4) $3x-2z+3=0$. **7.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 45°; 5) 60°. **8.** 1) 3; 2) 5; 3) $\sqrt{21}$. **9.** 1) $\sqrt{6}$; 2) $\frac{45}{\sqrt{101}}$. **10.** 1) 7; 2) $\frac{16}{\sqrt{10}}$. **11.** 1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{7}$; 2) $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$. **12.** 1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-3}$; 2) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{-8}$; 3) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{0}$. **13.** 1) $\frac{x-0{,}8}{3}=\frac{y+1{,}6}{-1}=\frac{z}{5}$; 2) $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$; 3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **14.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. **15.** $\frac{x-3}{8}=\frac{y}{7}=\frac{z+1}{4}$. **16.** 1) taip; 2) ne; 3) taip. **17.** 1) taip; 2) ne. **18.** 1) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{1}$; 2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{0}$. **19.** 1) $2x-3y+z-3=0$; 2) $3x-y+5z-3=0$. **20.** 1) 0°; 2) 90°; 3) 45°; 4) 24,1°. **21.** $l=-12$. **22.** $A=8$, $n=-4$. **23.** 1) $(1, -1, 0)$; 2) $(1, 2, -1{,}5)$; 3) $(-11, -11, 0)$. **24.** 1) $(4, -2, -1)$; 2) $(2, 3, 4)$. **25.** 1) $(1, -2, -10)$; 2) $(-1, -8, 4)$. **26.** $(1, 0, -3)$, 4; 2) $(-3, 2, -1)$, $4\sqrt{2}$; 3) $(0, -2, 1)$, 3; 4) $(-4, 2, -1)$, 10. **27.** a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2+z^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2+y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. **28.** a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2+z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. **29.** $y=x^2+z^2$. **30.** $x=y^2+z^2$. **31.** a) $y^2+z^2=x^2$; b) $y^2=x^2+z^2$. **32.** a) $\begin{cases} 4z=4+y^2, \\ x-2=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4z=x^2+1, \\ y-1=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z-4=0. \end{cases}$ **33.** a) $\begin{cases} -225y^2+36z^2=100, \\ x-1=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -100x^2+36z^2=900, \\ y+2=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 100x^2+225y^2=324, \\ z-3=0. \end{cases}$ **34.** a) $\begin{cases} \frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{16}=\frac{5}{9}, \\ x-2=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=\frac{25}{16}, \\ y+3=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0, \\ z+2=0. \end{cases}$ **35.** a) $\begin{cases} \frac{y^2}{15}+\frac{z^2}{10}=\frac{1}{48}, \\ x-7=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{48}-\frac{z^2}{10}=\frac{16}{15}, \\ y-1=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{15}=\frac{7}{5} \\ z+2=0. \end{cases}$. **36.** 1) triašis elipsoidas; 2) elipsinis kūgis; 3) parabolinis cilindras; 4) parabolinis cilindras; 5) vienašakis hiperboloidas; 6) dvišakis hiperboloidas; 7) sukimosi paraboloidas; 8) elipsinis cilindras; 9) elipsinis paraboloidas; 10) elipsinis kūgis; 11) hiperbolinis cilindras; 12) elipsinis kūgis.

7. KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS

7.1. Kelių kintamųjų funkcijos sąvoka

Anksčiau nagrinėjome funkcijas, priklausančias nuo vieno argumento. Tačiau dažnai, tirdami įvairius reiškinius, susiduriame su funkcijomis, priklausančiomis nuo dviejų ir daugiau argumentų.

Jeigu D yra kokia nors realiųjų skaičių porų aibė ir kiekvienai porai $(x, y)\in D$ pagal kokį nors dėsnį ar taisyklę priskiriamas realusis skaičius z, tai sakoma, kad aibėje D yra apibrėžta *dviejų kintamųjų funkcija* $z=f(x, y)$. Kintamieji x ir y vadinami *nepriklausomais kintamaisiais*, arba *argumentais*. Aibė D vadinama *funkcijos apibrėžimo sritimi*.

Panašiai galima apibrėžti trijų kintamųjų funkciją $u=f(x, y, z)$, kurios apibrėžimo sritis yra kokia nors skaičių trejetų (x, y, z) aibė, taip pat keturių ir daugiau kintamųjų funkciją.

Pavyzdžiai. 1. Trikampio plotas S yra jo pagrindo ilgio x ir aukštinės y funkcija, išreikšta formule

$$S=\frac{1}{2}x\cdot y.$$

2. Elektros srovės stiprumas I yra įtampos ir varžos funkcija:

$$I=\frac{U}{R}.$$

3. Stačiakampio gretasienio tūris V yra gretasienio ilgio x, pločio y ir aukščio z funkcija:

$$V=x\cdot y\cdot z.$$

Žinodami nepriklausomų kintamųjų x, y ir z reikšmes, galime nustatyti atitinkamą V reikšmę. Pavyzdžiui, kai stačiakampio gretasienio ilgis $x=4$, plotis $y=3$ ir aukštis $z=5$, tūris lygus

$$V=4\cdot 3\cdot 5=60.$$

Kadangi skaičių porą (x, y) pasirinktoje koordinačių sistemoje xOy atitinka vienintelis plokštumos taškas $M(x, y)$, kurio koordinatės yra x ir y, ir atvirkščiai, kiekvieną plokštumos tašką atitinka vienintelė skaičių pora (x, y), tai dviejų kintamųjų funkciją galima nagrinėti kaip plokštumos taškų funkciją. Vietoj užrašo $z=f(x, y)$ kartais rašoma $z=f(M)$. Šiuo atveju funkcijos apibrėžimo sritis yra kokia nors plokštumos taškų aibė $\{M\}$.

Trijų kintamųjų funkciją $u=f(x, y, z)$ galima nagrinėti kaip erdvės taškų funkciją.

Nagrinėsime kelių kintamųjų funkcijas, aprašytas analiziškai — formulėmis. Jų apibrėžimo sritimis laikysime atitinkamų formulių egzistavimo sritis.

Atkreipsime dėmesį, kad 1—3 pavyzdžiuose formulės egzistuoja su visomis kintamųjų reikšmėmis, tačiau pagal geometrinę ir fizikinę prasmę kintamieji gali įgyti tik teigiamas reikšmes.

4 pavyzdys. Rasime apibrėžimo sritis šių funkcijų:

a) $z=x^2+y^2$; b) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; c) $z=\ln(1-x^2-y^2)$;

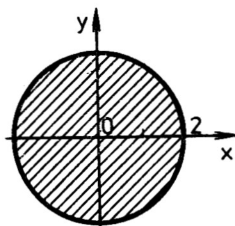
d) $z=\frac{1}{y-x^2}$; e) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$;

f) $f(x, y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}+\sqrt{x}$; g) $f(x, y, z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

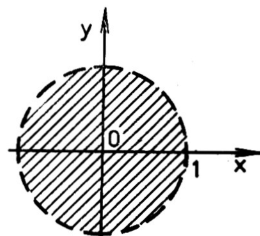
a) Funkcija apibrėžta su visomis (x, y) reikšmėmis, t. y. funkcija apibrėžta visoje plokštumoje;

b) Funkcija apibrėžta, kai $4-x^2-y^2\geqslant 0$, t. y. kai $x^2+y^2\leqslant 4$. Šią nelygybę tenkina visi uždarojo skritulio, kurio centras yra koordinačių pradžioje ir spindulys lygus 2, taškai (107 pav.);

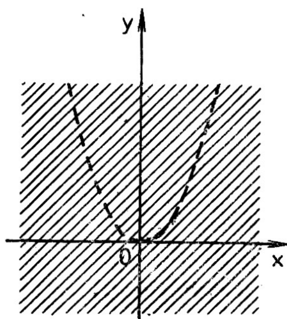
c) Funkcijos apibrėžimo sričiai priklauso taškai, kurių koordinatės tenkina nelygybę $x^2+y^2-1<0$. Taigi apibrėžimo sritis yra atvirasis skritulys (sričiai nepriklauso apskritimo $x^2+y^2=1$ taškai) (108 pav.);



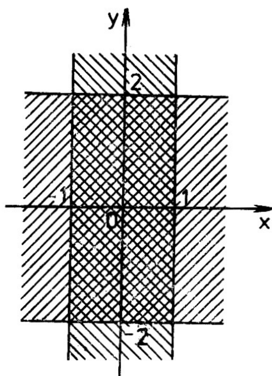
107 pav.



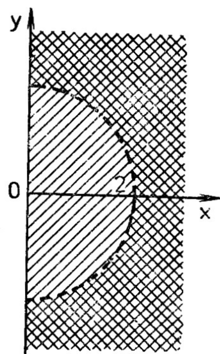
108 pav.



109 pav.



110 pav.



111 pav.

d) Funkcija neapibrėžta, kai $y-x^2 \neq 0$. Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sričiai priklauso visi plokštumos taškai, išskyrus parabolės $y=x^2$ taškus (109 pav.);

e) Funkcija apibrėžta, kai

$$\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0, \\ 4-y^2 \geqslant 0, \end{cases} \text{ t. y. kai } \begin{array}{l} |x| \leqslant 1, \\ |y| \leqslant 2. \end{array}$$

Apibrėžimo sritis pavaizduota 110 paveiksle (dukart užbrūkšniuota).

f) Apibrėžimo sričiai priklauso tie plokštumos taškai, kurių koordinatės tenkina nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2-4>0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Apibrėžimo sritis pavaizduota 111 paveiksle.

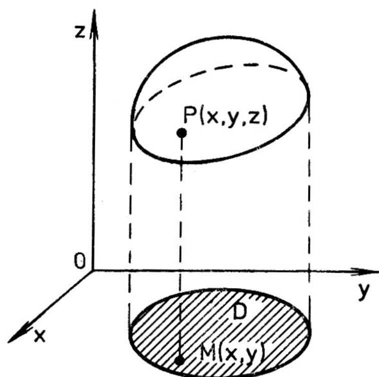
g) Nelygybes

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

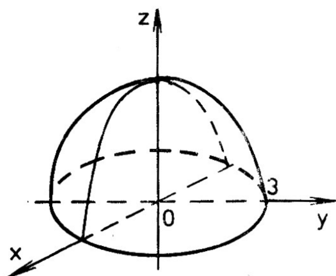
tenkina tik erdvės pirmojo oktanto taškų koordinatės. Apibrėžimo sritis yra erdvės pirmojo oktanto taškai.

Iš pateiktų pavyzdžių išplaukia, kad kelių kintamųjų funkcijų apibrėžimo sritys gali būti labai įvairios.

Erdvės taškų $P(x, y, z)$, $(x, y) \in D$, o $z=f(x, y)$, aibę vadinsime *funkcijos* $z=f(x, y)$ *grafiku*. Tai erdvės paviršius (112 pav.).



112 pav.



113 pav.

5 pavyzdys. Nubraižysime funkcijos $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ grafiką. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra uždarasis skritulys, kurio centras (0, 0) ir spindulys 3. Lygybės $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ abi puses pakėlę kvadratu, gauname:

$$x^2+y^2+z^2=9 \quad (z\geqslant 0).$$

Tai sferos dalies, esančios virš plokštumos xOy, lygtis. Vadinasi, duotosios funkcijos grafikas yra pusė sferos (113 pav.).

Paprastai funkcijos $z=f(x, y)$ grafiką gana sunku pavaizduoti. Todėl dažnai nagrinėjamos paviršiaus susikirtimo su plokštumomis $z=h$ $(h\in R)$ linijos.

Aibė plokštumos xOy taškų, kuriuose funkcija $z=f(x, y)$ įgyja pastovią reikšmę h:

$$f(x, y)=h,$$

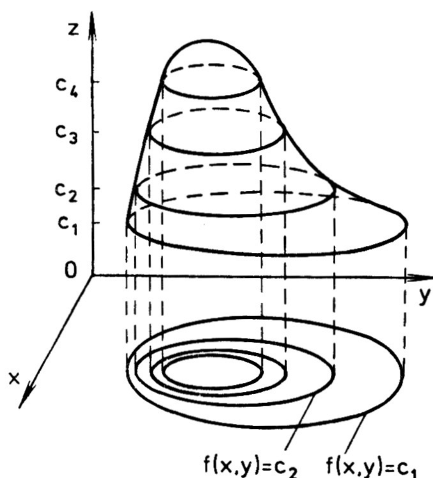
vadinama *funkcijos lygio h linija.* Keisdami h reikšmes, gauname įvairias lygio linijas. Lygio linijų sutankėjimas reiškia greitesnį funkcijos kitimą (toje vietoje paviršius yra statesnis), o šių linijų išretėjimas — funkcijos lėtesnį kitimą (paviršius yra nuožulnesnis) (114 pav.).

6 pavyzdys. Nubraižysime funkcijos

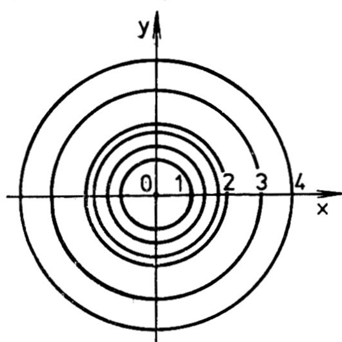
$$z=9-x^2-y^2$$

lygio linijas.

Imdami konkrečias h reikšmes, turime: kai $z=9$, lygio linija yra $x^2+y^2=0$ — tai taškas (0, 0); kai $z=8, 7, 6, 5, 0, -7, \cdots$, lygio



114 pav.



115 pav.

linijos yra apskritimai, kurių centras koordinačių pradžioje, o spinduliai atitinkamai lygūs 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, 3, 4... (115 pav.).

7.2. Dviejų kintamųjų funkcijos riba, tolydumas ir diferencijuojamumas

Atstumą tarp dviejų plokštumos taškų $M(x, y)$ ir $M_0(x_0, y_0)$ žymėsime $d(M, M_0)$:

$$d(M, M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}.$$

Plokštumos dalį, kurios taškų koordinatės tenkina nelygybę

$$d(M, M_0)<\delta,$$

vadinsime taško M_0 *δ-aplinka.* Tai atvirasis skritulys, kurio centras yra taške M_0 ir spindulys lygus δ.

Sakysime, kad *taškų seka* $\{M_n(x_n, y_n)\}$ *konverguoja į tašką* $M_0(x_0, y_0)$, ir rašysime

$$\lim_{n\to\infty} M_n=M_0,$$

jeigu

$$\lim_{n\to\infty} d(M_n, M_0)=0,$$

arba

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}=0.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ ir } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Sakysime, kad *skaičius* A *yra funkcijos* $z=f(x, y)$, apibrėžtos aibėje D, *riba,* kai taškas $M(x, y)$ konverguoja į tašką $M_0(x_0, y_0)$, jeigu imant bet kurią taškų seką $\{M_n\}$, konverguojančią į tašką M_0, funkcijos reikšmių seka $f(M_n)$ konverguoja į A, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = A.$$

Norėdami pažymėti, kad funkcija $z=f(x, y)$ turi ribą A taške $M_0(x_0, y_0)$, rašome

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A, \text{ arba } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x, y) - A) = 0. \qquad (1)$$

Imkime kurį nors funkcijos $z=f(x, y)$ apibrėžimo srities tašką $M_0(x_0, y_0)$ ir tašką $(x_0+\Delta x, y_0)$, gautą iš $M_0(x_0, y_0)$ suteikus tik pokytį Δx pirmajai koordinatei. Skirtumą

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \qquad (2)$$

vadinsime funkcijos $z=f(x, y)$ *daliniu pokyčiu* x *atžvilgiu taške* $M_0(x_0, y_0)$ ir žymėsime $\Delta_x z$, arba $\Delta_x f(x_0, y_0)$.

Jeigu nagrinėsime tašką $(x_0, y_0+\Delta y)$, gautą iš $M_0(x_0, y_0)$ suteikus pokytį Δy tik antrajai koordinatei, tai skirtumą

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (3)$$

vadinsime *funkcijos* $z=f(x, y)$ *daliniu pokyčiu* y *atžvilgiu taške* $M_0(x_0, y_0)$ ir žymėsime $\Delta_y z$, arba $\Delta_y f(x_0, y_0)$.

Jeigu pirmajai koordinatei suteiksime pokytį Δx, o antrajai — Δy, tai skirtumą

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (4)$$

vadinsime *pilnuoju funkcijos pokyčiu taške* $M_0(x_0, y_0)$ ir žymėsime Δz, arba $\Delta f(x_0, y_0)$.

1 pavyzdys. Rasime funkcijos $z=x^2+xy+y^2$ dalinius ir pilnąjį pokyčius, kai x pasikeis nuo 3 iki 3,1, o y — nuo 2 iki 1,8.

Šiuo atveju $x_0=3$, $\Delta x=0{,}1$, $y_0=2$, $\Delta y=-0{,}2$ ir $f(3, 2)=3^2+$ $+3\cdot 2+2^2=19$, $f(3{,}1, 2)=3{,}1^2+3{,}1\cdot 2+2^2=19{,}81$, $f(3, 1{,}8)=3^2+$ $+3\cdot 1{,}8+1{,}8^2=17{,}64$, $f(3{,}1, 1{,}8)=3{,}1^2+3{,}1\cdot 1{,}8+1{,}8^2=18{,}43$. Remdamiesi (2—4) formulėmis, gauname:

$\Delta_x z=19{,}81-19=0{,}81$, $\Delta_y z=17{,}64-19=-1{,}36$, $\Delta z=18{,}43-19=$ $=-0{,}57$.

Funkciją $z=f(x, y)$ vadinsime tolydžia taške $M_0(x_0, y_0)$, jeigu

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0)=0, \tag{5}$$

t. y. jeigu pilnojo funkcijos pokyčio riba, kai argumentų pokyčiai artėja prie nulio, lygi nuliui.

Iš (5) lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

t. y. tolydžios taške $M_0(x_0, y_0)$ funkcijos riba tame taške lygi funkcijos reikšmei $f(x_0, y_0)$.

Funkciją vadinsime *tolydžia srityje D*, jeigu ji yra tolydi kiekviename tos srities taške.

2 pavyzdys. Funkcija $f(x, y)=x^3+xy$ yra tolydi visoje plokštumoje.

Iš tikrųjų $\Delta f(x, y)=(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)-(x^3+xy)=$ $=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+xy+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot y+\Delta x\cdot\Delta y-x^3-$ $xy=3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+\Delta x\cdot\Delta y+(\Delta x)^3+\Delta x\cdot y+x\cdot\Delta y\to 0$, kai $\Delta x\to 0$ ir $\Delta y\to 0$ su visomis x ir y reikšmėmis.

Jeigu egzistuoja baigtinė riba

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x},} \tag{6}$$

tai ją vadinsime funkcijos $z=f(x, y)$ *daline išvestine pagal kintamąjį x taške* (x_0, y_0) ir žymėsime vienu iš simbolių

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ f'_x(x_0, y_0).$$

Panašiai galime apibrėžti *dalinę išvestinę pagal kintamąjį y taške* (x_0, y_0):

$$\boxed{z'_y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}} \tag{7}$$

Iš (6) ir (7) formulių išplaukia, kad dalinės išvestinės faktiškai yra vieno kintamojo funkcijos išvestinės, t. y. ieškant z'_x, kintamasis y laikomas pastoviu, o skaičiuojant z'_y, kintamasis x laikomas pastoviu. Todėl, ieškodami dalinių išvestinių, remsimės vieno kintamojo funkcijos diferencijavimo taisyklėmis ir formulėmis.

Pavyzdžiai. 3. Apskaičiuosime pateiktų funkcijų dalines išvestines bet kuriame jų apibrėžimo sričių taške (x, y):

a) $z=4x^3y^2+\sqrt{xy}$; b) $z=x^y+\ln y$.

Naudosimės vieno kintamojo funkcijos išvestinių lentele:

a) $z'_x = 12x^2y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $z'_y = 8x^3y + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$;

b) $z'_x = yx^{y-1} + 0$, $z'_y = x^y \ln x + \frac{1}{y}$.

4. Rasime funkcijos $f(x, y) = \ln(x^2+y^2) + 2^x$ dalines išvestines taške (0, 1).

Kadangi

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + 2^x \ln 2, \quad f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

tai $f'_x(0, 1) = \ln 2$, $f'_y(0, 1) = 2$.

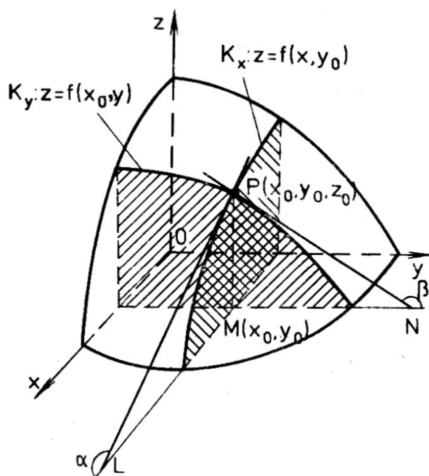
Panašiai apibrėžiamos ir skaičiuojamos trijų ir daugiau kintamųjų funkcijų dalinės išvestinės.

5 **pavyzdys.** Rasime funkcijos $u = x^4y^3 + 3y^2 + xe^{2z}$ dalines išvestines.

Bet kuriame taške (x, y, z)

$$u'_x = 4x^3y^3 + e^{2z}, \quad u'_y = 3x^4y^2 + 6y, \quad u'_z = 2xe^{2z}.$$

Išsiaiškinsime funkcijos $z = f(x, y)$ dalinių išvestinių z'_x ir z'_y taške (x_0, y_0) geometrinę prasmę. Sakykime, 116 paveiksle pavaizduotas funkcijos $z = f(x, y)$ grafikas. Šį paviršių kirsdami plokštuma $y = y_0$, lygiagrečia plokštumai xOz, gauname plokščiąją kreivę K_x (jos lygtis: $z = f(x, y_0)$). Jeigu PL yra kreivės K_x liestinė



116 pav.

taške $P(x_0, y_0, z_0=f(x_0, y_0))$ ir α — kampas, kurį sudaro liestinė su teigiamąja Ox kryptimi, tai

$$z'_x=\operatorname{tg}\alpha.$$

Jeigu kreivė K_y yra paviršiaus pjūvis plokštuma $x=x_0$, lygiagrečia plokštumai yOz, ir PN — tos kreivės (jos lygtis: $z=f(x_0, y)$) liestinė taške $P(x_0, y_0, z_0)$, su teigiamąja Oy kryptimi sudaranti kampą β, tai

$$z'_y=\operatorname{tg}\beta.$$

Funkciją $z=f(x, y)$ vadinsime *diferencijuojama taške* (x_0, y_0), jeigu jos pilnąjį pokytį galima užrašyti šitaip:

$$\Delta z=\Delta f(x_0, y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\alpha_2\cdot\Delta y; \tag{8}$$

čia $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$, kai $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, o A ir B — realieji skaičiai, nepriklausantys nuo Δx ir Δy.

Tiesinę funkcijos $z=f(x, y)$ pokyčio Δz dalį

$$A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$$

vadinsime *funkcijos pilnuoju diferencialu taške* (x_0, y_0) ir žymėsime

$$dz=df(x_0, y_0)=A\Delta x+B\Delta y. \tag{9}$$

Jei nepriklausomų kintamųjų pokyčius Δx ir Δy laikysime jų diferencialais

$$\Delta x=dx, \quad \Delta y=dy,$$

tai funkcijos $z=f(x, y)$ diferencialą užrašysime šitaip:

$$dz=Adx+Bdy. \tag{10}$$

1 teorema. *Jeigu funkcija $z=f(x, y)$ yra diferencijuojama taške (x_0, y_0), tai ji tame taške yra tolydi.*

Į r o d y m a s. Kadangi funkcija yra diferencijuojama taške (x_0, y_0), tai jos pilnąjį pokytį Δz galima užrašyti (8) formule. Akivaizdu, kad

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y)=0,$$

todėl pagal (5) lygybę funkcija $z=f(x, y)$ yra tolydi taške (x_0, y_0).

2 teorema. *Jeigu funkcija $z=f(x, y)$ yra diferencijuojama taške (x_0, y_0), tai ji tame taške turi dalines išvestines ir $A=z'_x(x_0, y_0)$, $B=z'_y(x_0, y_0)$, $dz=z'_x(x_0, y_0)dx+z'_y(x_0, y_0)dy$.*

Į r o d y m a s. Diferencijuojamos funkcijos pilnajam pokyčiui taške (x_0, y_0) galioja (8) formulė. Į ją įrašę $\Delta y=0$, gauname

$$\Delta_x z=A\cdot\Delta x+\alpha_1\cdot\Delta x.$$

Iš čia

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\alpha_1$$

ir

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A.$$

Panašiai įrodome, kad $z'_y=B$.

Funkciją, diferencijuojamą kiekviename srities D taške, vadinsime *diferencijuojama toje srityje.*

2 teorema nusako būtinąsias funkcijos diferencijuojamumo sąlygas, kurios yra nepakankamos.

3 teorema (pakankamosios diferencijuojamumo sąlygos). *Jeigu funkcija $z=f(x, y)$ srityje D turi tolydžias dalines išvestines z'_x ir z'_y, tai ji toje srityje yra diferencijuojama.*

Šios teoremos neįrodinėsime.

6 pavyzdys. Rasime funkcijos $z=\sin xy+\operatorname{tg} x$ diferencialą.

Kadangi

$$z'_x=y\cos xy+\frac{1}{\cos^2 x},\quad z'_y=x\cos xy,$$

tai

$$dz=\left(y\cos xy+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx+x\cos xy\,dy.$$

Pastaba. Kaip ir dviejų kintamųjų funkcijai, galima įrodyti, kad funkcija $u=f(x, y, z)$, turinti tolydžias išvestines u'_x, u'_y, u'_z, yra diferencijuojama ir jos diferencialas yra

$$du=u'_x dx+u'_y\,dy+u'_z dz. \tag{11}$$

7 pavyzdys. Rasime funkcijos $u=x^3y^3z^3$ diferencialą.

Kadangi

$$u'_x=3x^2y^3z^3,\quad u'_y=3x^3y^2z^3,\quad u'_z=3x^3y^3z^2,$$

tai

$$du=3x^2y^3z^3dx+3x^3y^2z^3dy+3x^3y^3z^2dz.$$

Jeigu Δx ir Δy pakankamai maži, tai funkcijos $z=f(x, y)$ pokytį

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

galima pakeisti tos funkcijos diferencialu

$$df(x_0, y_0)=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

t. y.

$$\Delta f(x_0, y_0)\approx df(x_0, y_0),$$

arba

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y. \quad (12)$$

(12) formulė plačiai taikoma funkcijų apytikslėms reikšmėms skaičiuoti.

8 pavyzdys. Apskaičiuosime apytikslę reiškinio $C=\sqrt{2{,}02^3+0{,}97^2}$ reikšmę.

Sakykime, $f(x,\ y)=\sqrt{x^3+y^2}$. Tada $C=f(2{,}02,\ 0{,}97)$. x_0 ir y_0 taip parenkame, kad jie būtų artimi atitinkamai 2,02 ir 0,97 ir kad būtų nesunku apskaičiuoti funkcijos reikšmę taške $(x_0,\ y_0)$. Šiame pavyzdyje $x_0=2$, $y_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}03$.

Kadangi

$$f'_x(x,\ y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}},\quad f'_y(x,\ y)=\frac{y}{\sqrt{x^3+y^2}},$$

tai $f(2,\ 1)=3$, $f'_x(2,\ 1)=2$, $f'_y(2,\ 1)=\frac{1}{3}$, $C=f(2{,}03,\ 0{,}97)\approx f(2,\ 1)+f_x(2,\ 1)\cdot 0{,}02+f'_y(2,\ 1)\cdot(-0{,}03)=3+2\cdot 0{,}02+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}03)=3{,}03$.

7.3. Sudėtinės funkcijos išvestinė

Sakykime, funkcijos $z=f(x,\ y)$, apibrėžtos srityje D, argumentai x ir y yra kintamojo t funkcijos:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

ir taškas $(\varphi(t),\ \psi(t))\in D$ su visomis $t\in[\alpha,\ \beta]$ reikšmėmis. Tada z yra sudėtinė kintamojo t funkcija

$$z=f((\varphi(t),\ \psi(t))=F(t).$$

Teorema. *Jeigu funkcija $z=f(x,\ y)$ yra diferencijuojama taške $(x,\ y)$, o funkcijos $x=\varphi(t)$ ir $y=\psi(t)$ turi išvestines $x'_t=\varphi'(t)$, $y'_t=\psi'(t)$, tai sudėtinė funkcija irgi turi išvestinę, kuri randama pagal formulę*

$$\boxed{z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t.} \quad (1)$$

Į r o d y m a s. Argumentui t suteikiame pokytį Δt. Tada funkcijos $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ir $z=f(x,\ y)$ įgyja pokyčius:

$$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t),\quad \Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t),$$
$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

Kadangi funkcija $z=f(x, y)$ yra diferencijuojama taške (x, y), tai

$$\Delta z=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y;$$

čia $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$, kai $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Šios lygybės abi puses padaliję iš Δt, gauname:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha_2\frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Kai pokytis Δt artėja prie 0, Δx ir Δy irgi artėja prie 0, nes funkcijos $\varphi(t)$ ir $\psi(t)$ yra tolydžios (jos turi išvestines). Todėl α_1 ir α_2 artės prie nulio, kai $\Delta t\to 0$.

(2) lygybėje perėję prie ribos, kai $\Delta t\to 0$, gauname

$$z'_t=f'_x(x, y)\cdot x'_t+f'_y(x, y)\cdot y'_t,$$

arba

$$z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t.$$

Panašiai gaunama ir sudėtinės funkcijos, turinčios daugiau kaip du kintamuosius, formulė išvestinei skaičiuoti.

Jeigu $u=f(x, y, z)$, o $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, tai

$$\boxed{u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t.} \qquad (3)$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime z'_t, kai $z=x^2+y^2$, $x=e^{2t}$, $y=\sqrt[3]{t}$. Kadangi

$$z'_x=2x,\ z'_y=2y,\ x'_t=2e^{2t},\ y'_t=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}},$$

tai pagal (2) formulę

$$z'_t=2x\cdot 2e^{2t}+2y\cdot\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}=4e^{4t}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t}}.$$

2. Rasime u'_t, kai $u=x^2+y^2+z^2$, $x=\sqrt{t}$, $y=\cos t$, $z=t^2$.

$$u'_t=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}+2y\cdot(-\sin t)+2z\cdot 2t=1-\sin 2t+4t^3.$$

Išnagrinėsime bendresnį atvejį. Sakykime, funkcija $z=f(x, y)$ yra diferencijuojama taške (x, y), o x ir y yra kelių kintamųjų diferencijuojamos funkcijos, pavyzdžiui, $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$. Tada sudėtinė funkcija $z=f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ yra diferencijuojama, o jos išvestinės skaičiuojamos pagal formules

$$\boxed{\begin{aligned} z'_u&=z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u,\\ z'_v&=z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v.\end{aligned}} \qquad (4)$$

Sudėtinės funkcijos diferencijuojamumo neįrodinėsime, o (4) formulės išplaukia iš (2) formulės pirmą kartą laikant pastoviu v, o antrą kartą — u.

3 pavyzdys. Rasime z'_u ir z'_v, kai $z=xy$, $x=u^2+v^2$, $y=u^2-v^2$. Pagal (4) formules

$$z'_u=y\cdot 2u+x\cdot 2u=2u(u^2-v^2+u^2+v^2)=4u^3,$$
$$z'_v=y\cdot 2v+x\cdot(-2v)=2v(u^2-v^2-u^2-v^2)=-4v^3.$$

7.4. Kryptinė išvestinė. Gradientas

Sakykime, funkcija $u=f(x, y, z)$ diferencijuojama taške (x_0, y_0, z_0). Tiesės, kuri eina per tašką (x_0, y_0, z_0) ir kurios krypties vektorius $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, lygtys yra (žr. 6.5 skyrelio (2) formules)

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cos\beta, \\ z=z_0+t\cos\gamma. \end{cases}$$

Pagal 7.3 skyrelio (3) formulę sudėtinės funkcijos $u=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$ išvestinė lygi

$$\begin{aligned} u'_t=&f'_x(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\cos\alpha+ \\ &+f'_y(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\cos\beta+ \\ &+f'_z(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)\cos\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Išvestinės u'_t reikšmę, kai $t=0$, vadinsime *funkcijos išvestine taške* (x_0, y_0, z_0) *kryptimi* $\mathbf{e}$, arba *kryptine išvestine taške* (x_0, y_0, z_0), ir žymėsime $\frac{\partial u}{\partial e}$.

Iš (1) formulės, kai $t=0$, gauname:

$$\frac{\partial u}{\partial e}=f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma. \tag{2}$$

Analogiškai funkcijos $z=f(x, y)$ išvestinė taške (x_0, y_0) kryptimi $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta)$ lygi

$$\frac{\partial z}{\partial e}=f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0, y_0)\cos\beta. \tag{3}$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime funkcijos $z=x^2-xy-2y^2$ išvestinę taške (1, 2) kryptimi, kuri su ašimi Ox sudaro 60° kampą.

Šios funkcijos dalinės išvestinės taške (1, 2) yra $z'_x=2x-y$, $z'_x(1, 2)=0$; $z'_y=-x-4y$, $z'_y(1, 2)=-9$. Pagal sąlygą $\alpha=60°$, tai $\beta=90°-\alpha=30°$.

Remdamiesi (3) formule, gauname:

$$\frac{\partial z}{\partial e}=0\cdot\cos 60^\circ+(-9)\cdot\cos 30^\circ=-\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

2. Apskaičiuosime funkcijos $u=x^2+xy+z^2$ išvestinę taške $M(1,\ 1,\ -1)$ kryptimi $\overrightarrow{MN}$, jei taško N koordinatės yra $(1,\ -2,\ -5)$.

Rasime vienetinio vektoriaus $\mathbf{e}=\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}$ koordinates. Kadangi $\overrightarrow{MN}=(1-1,\ -2-1,\ -5+1)=(0,\ -3,\ -4)$ ir $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+(-4)^2}=5$, tai $\mathbf{e}=\left(0,\ -\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$. Iš čia $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$. Kadangi $u'_x=2x+y$, $u'_y=x$, $u'_z=2z$, $u'_x(1,\ 1,\ -1)=3$, $u'_y(1,\ 1,\ -1)=1$, $u'_z(1,\ 1,\ -1)=-2$, tai pagal (2) formulę gauname:

$$\frac{\partial u}{\partial e}=3\cdot 0+1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+(-2)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=1.$$

Funkcijos $z=f(x,\ y)$ *gradientu taške* $(x_0,\ y_0)$ vadinsime vektorių

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad} z}=(f'_x(x_0,\ y_0),\ f'_y(x_0,\ y_0)).}\tag{4}$$

Panašiai galime apibrėžti ir trijų bei daugiau kintamųjų funkcijos gradientą. Pavyzdžiui, *trijų kintamųjų funkcijos* $u=f(x,\ y,\ z)$ *gradientu taške* $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ vadinsime vektorių

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad} u}=(f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0),\ f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0),\ f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)).}\tag{5}$$

Iš (2) formulės pagal skaliarinės sandaugos apibrėžimą išplaukia

$$\frac{\partial u}{\partial e}=(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}\cdot\mathbf{e})=|\overrightarrow{\operatorname{grad} u}|\cdot|\vec{\mathbf{e}}|\cdot\cos\varphi=|\overrightarrow{\operatorname{grad} u}|\cdot\cos\varphi;\tag{6}$$

čia φ — kampas tarp funkcijos gradiento ir vektoriaus **e**. Iš (6) formulės matyti, kad kryptinė išvestinė įgyja didžiausią reikšmę, kai $\varphi=0$, t. y. kai vektoriaus **e** kryptis sutampa su gradiento kryptimi. Taigi *gradiento kryptimi funkcija keičiasi greičiausiai.*

3 pavyzdys. Rasime funkcijos $u=xy+\frac{y}{z}$ gradiento taške $(1,\ 2,\ -1)$ modulį.

12. Užsak. Nr. 284.

Kadangi $u'_x=y$, $u'_y=x+\frac{1}{z}$, $u'_z=-\frac{y}{z^2}$ ir $u'_x(1, 2, -1)=2$, $u'_y(1, 2, -1)=0$, $u'_z(1, 2, -1)=-2$, tai $\overrightarrow{\text{grad}\, u}(1, 2, -1)=(2, 0, -2)$ ir $|\overrightarrow{\text{grad}\, u}(1, 2, -1)|=\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

7.5. Aukštesniųjų eilių išvestinės

Jeigu funkcija $z=f(x, y)$ yra diferencijuojama kiekviename apibrėžimo srities taške, tai jos išvestinės $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ yra x ir y funkcijos. Jeigu šios funkcijos turi dalines išvestines, tai pastarosios vadinamos duotosios funkcijos antrosios eilės dalinėmis išvestinėmis ir žymimos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x, y)=z''_{xx},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x, y)=z''_{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x, y)=z''_{yx},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f\ \ (x, y)=z_{yy}.$$

Iš keturių antrosios eilės dalinių išvestinių savo ruožtu gauname aštuonias trečiosios eilės dalines išvestines ir t. t.

Panašiai apibrėžiamos trijų ir didesnio skaičiaus kintamųjų funkcijų antrosios ir aukštesniųjų eilių dalinės išvestinės.

Galima įrodyti, kad tuo atveju, kai gautosios dalinės išvestinės yra tolydžios funkcijos, tai dalinės išvestinės, tesiskiriančios tik diferencijavimo tvarka, yra lygios.

Pavyzdžiui, *jei funkcijos* $z=f(x, y)$ *dalinės išvestinės* z''_{xy} *ir* z''_{yx} *yra tolydžios funkcijos kokioje nors srityje, tai toje srityje*

$$z''_{xy}=z''_{yx}.$$

Šio teiginio neįrodinėsime, o iliustruosime pavyzdžiais.

Pavyzdžiai. 1. Rasime funkcijos $z=x^3+x^2y-2y^5$ antrosios eilės dalines išvestines. Randame:

$$z'_x=3x^2+2xy,\ z''_{xy}=2x,\ z''_{xx}=6x+2y,$$
$$z'_y=x^2-10y^4,\ z''_{yx}=2x,\ z_{yy}=-40y^3.$$

Matome, kad $z''_{xy}=z''_{yx}$.

2. Jeigu $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$, tai

$$z'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Iš čia

$$z''_{xx}=\frac{0\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yx}=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z''_{yy}=-\frac{0\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ir šiame pavyzdyje $z''_{xy}=z_{yx}$.

7.6. Kelių kintamųjų funkcijos ekstremumai

Nagrinėsime funkciją $z=f(x, y)$, apibrėžtą srityje D.

Sakysime, kad ši *funkcija taške* $(a, b)\in D$ *įgyja lokalųjį maksimumą,* jeigu egzistuoja tokia to taško aplinka, kurios visiems taškams galioja nelygybė

$$f(x, y)\leqslant f(a, b),$$

arba

$$\Delta f(a, b)=f(x, y)-f(a, b)\leqslant 0; \qquad (1)$$

čia $x=a+\Delta x$, $y=b+\Delta y$ (117 pav., *a*)).

Funkcija $z=f(x, y)$ *taške* (a, b) *įgyja lokalųjį minimumą,* jeigu

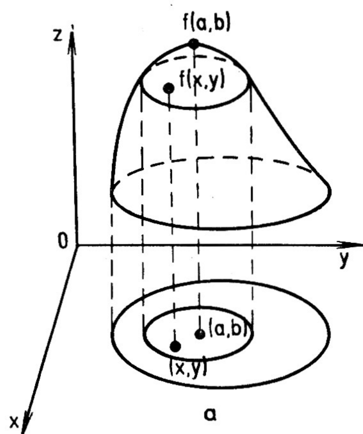
$$f(x, y)\geqslant f(a, b),$$

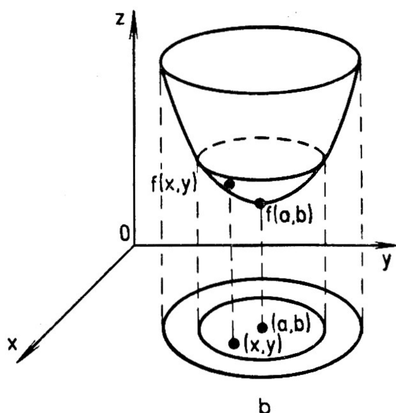
arba

$$\Delta f(a, b)=f(x, y)-f(a, b)\geqslant 0 \qquad (2)$$

(117 pav., *b*).

Funkcijos lokalieji maksimumai ir minimumai vadinami *funkcijos ekstremumais,* o taškai, kuriuose įgyjami ekstremumai,— *ekstremumo taškais.*





117 pav.

1 teorema (būtinosios ekstremumo sąlygos). *Jeigu funkcija* $z=f(x, y)$ *taške* (a, b) *turi ekstremumą, tai*

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0 \quad (3)$$

arba bent viena iš dalinių išvestinių tame taške neegzistuoja.

Įrodymas. Sakykime, taške (a, b) funkcija įgyja lokalųjį maksimumą, t. y. egzistuoja tokia šio taško aplinka, kurios visi taškai tenkina (1) nelygybę. Atskiru atveju, kai $y=b$,

$$f(x, b) \leqslant f(a, b).$$

Vadinasi, vieno kintamojo funkcija $f(x, b)$ taške a įgyja lokalųjį maksimumą. Todėl $f'_x(a, b)$ lygi 0 arba neegzistuoja. Panašiai įrodome, kad $f'_y(a, b)$ lygi 0 arba neegzistuoja.

Iš 1 teoremos aišku, kad ekstremumo taškų reikia ieškoti tarp tų taškų, kuriuose funkcijos pirmosios eilės dalinės išvestinės lygios nuliui arba kuriuose bent viena dalinė išvestinė neegzistuoja. Tokie taškai vadinami *stacionariaisiais*. Juose funkcija gali ir neturėti ekstremumo.

1 pavyzdys. Rasime ekstremumus šių funkcijų: a) $z=x^4+y^4$; b) $z=x^2-y^2$.

a) Kadangi $z'_x=4x^3$, $z'_y=4y^3$, tai stacionariuosius taškus rasime išsprendę sistemą

$$\begin{cases} 4x^3=0, \\ 4y^3=0. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinys yra (0, 0). Taigi nagrinėjamoji funkcija gali turėti ekstremumą vieninteliame taške (0, 0). Ištirsime funk-

cijos pokytį tame taške. Kadangi $\Delta f(0, 0)=(\Delta x)^4+(\Delta y)^4\geqslant 0$ su bet kuriomis Δx ir Δy reikšmėmis, tai nagrinėjamoji funkcija taške (0, 0) įgyja minimumą: $z_{\min}(0, 0)=0$.

b) Nesunku nustatyti, kad tik taške (0, 0) funkcija gali įgyti ekstremumą. Funkcijos pokytis taške (0, 0) yra $\Delta f(0, 0)=(\Delta x)^2-(\Delta y)^2$. Jeigu $|\Delta x|>|\Delta y|$, tai $\Delta f(0, 0)>0$, o jeigu $|\Delta x|<|\Delta y|$, tai $\Delta f(0, 0)<0$. Kadangi funkcijos pokytis taške (0, 0) nėra pastovaus ženklo, tai funkcija tame taške ekstremumo neturi.

Platesniame aukštosios matematikos kurse įrodoma teorema apie pakankamas dviejų kintamųjų funkcijos ekstremumo sąlygas, čia ją pateiksime be įrodymo.

2 teorema (pakankamosios ekstremumo sąlygos). *Sakykime, kad funkcija $z=f(x, y)$ turi antrosios eilės dalines išvestines ir taške (a, b) gali įgyti ekstremumą. Tada*

1) *jei antrosios eilės determinantas*

$$\Delta(a, b)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix}>0, \qquad (4)$$

tai funkcija taške (a, b) įgyja ekstremumą: minimumą, kai $f''_{xx}(a, b)>0$, ir maksimumą, kai $f''_{xx}(a, b)<0$;

2) *jei $\Delta(a, b)<0$, taške (a, b) ekstremumo nėra;*

3) *jei $\Delta=0$, reikia papildomai tirti.*

Pavyzdžiai. 2. Rasime funkcijos $z=3xy-x^3-y^3$ ekstremumus.

Kadangi $z'_x=3y-3x^2$, $z'_y=3x-3y^2$, tai išsprendę sistemą

$$\begin{cases} 3y-3x^2=0, \\ 3x-3y^2=0, \end{cases}$$

randame du taškus (0, 0) ir (1, 1), kuriuose funkcija gali įgyti ekstremumus. Tirsime tuos taškus remdamiesi 2 teorema. Randame

$$z''_{xx}=-6x, \quad z''_{xy}=z''_{yx}=3, \quad z''_{yy}=-6y.$$

Kadangi taške (0, 0) $z''_{xx}(0, 0)=0$, $z''_{xy}(0, 0)=3$, $z''_{yy}(0, 0,)=0$ ir $\Delta(0, 0)=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0$, tai šiame taške funkcija ekstremumo neturi.

Taške (1, 1) $z''_{xx}(1, 1)=-6$, $z''_{xy}(1, 1)=3$, $z''_{yy}(1, 1)=-6$ ir $\Delta(1, 1)=\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=27>0$. Šiame taške funkcija įgyja maksimumą, nes $z''_{xx}(1, 1)=-6<0$. $z_{\max}(1, 1)=3\cdot 1\cdot 1-1^3-1^3=1$.

3. Rasime funkcijos $z=x^3+(x+y)^2$ ekstremumus.

Iš sistemos

$$\begin{cases} z'_x=3x^2+2(x+y)=0, \\ z'_y=2(x+y)=0 \end{cases}$$

randame tašką (0, 0), kuriame funkcija gali turėti ekstremumą.

Kadangi $z''_{xx}=6x+2$, $z''_{xy}=z''_{yx}=2$, $z''_{yy}=2$, tai $\Delta(0, 0)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$ ir reikia papildomai tirti. Tirsime funkcijos pokyčio ženklą taške (0, 0). Turime $\Delta z(0, 0)=(\Delta x)^3+(\Delta x+\Delta y)^2$. Jeigu nagrinėsime tokius Δx ir Δy, kad $\Delta x=-\Delta y$, tai tada pokytis $\Delta z(0, 0)=(\Delta x)^3$ gali įgyti ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes, priklausomai nuo Δx ženklo. Vadinasi, tame taške funkcija ekstremumo neturi.

4. Kaip ir antrajame pavyzdyje, įsitikiname, kad funkcija $z=x^4+(x+y)^2$ gali turėti ekstremumą tik taške (0, 0), kuriame $\Delta=0$. Šiame taške $\Delta z(0, 0)=(\Delta x)^4+(\Delta x+\Delta y)^2\geqslant 0$, kad ir kokie būtų Δx ir Δy. Taigi taške (0, 0) funkcija įgyja minimumą $z_{\min}(0, 0)=0$.

5. Rasime, kokių matmenų turi būti stačiakampio gretasienio formos tūrio V atviras baseinas, kad jo vidui iškloti reikėtų mažiausiai plytelių.

Baseino ilgį pažymėkime x, plotį — y, aukštį — z (118 pav.). Tada baseino paviršiaus plotas lygus

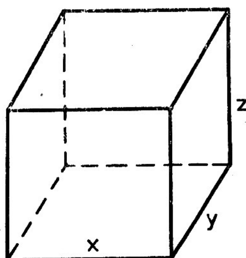
$$T=xy+2xz+2yz, \tag{5}$$

o tūris

$$V=xyz. \tag{6}$$

Iš tūrio išraiškos radę z reikšmę

$$z=\frac{V}{xy}, \tag{7}$$



118 pav.

įrašome ją į paviršiaus ploto formulę:

$$T=xy+2\frac{V}{y}+2\frac{V}{x}.$$

Reikia rasti funkcijos $T=T(x, y)$ mažiausią reikšmę, kai $x>0$, $y>0$. Radę dalines išvestines

$$T'_x=y-\frac{2V}{x^2},\quad T'_y=x-\frac{2V}{y^2}$$

ir išsprendę sistemą

$$\begin{cases} y-\dfrac{2V}{x^2}=0, \\ x-\dfrac{2V}{y^2}=0, \end{cases}$$

gauname $x=\sqrt[3]{2V}$, $y=\sqrt[3]{2V}$. Taigi taške $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ funkcija $T(x, y)$ gali įgyti ekstremumą. Nesunku patikrinti, kad tame taške $T(x, y)$ įgyja minimumą $(\Delta(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})>0$, $T''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})>$ $>0!)$. Iš (7) formulės randame z:

$$z=\frac{V}{\sqrt[3]{2V}\cdot\sqrt[3]{2V}}=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Taigi baseinui iškloti mažiausiai plytelių reikės tada, kai jo pagrindas bus kvadratas, o aukštinė lygi pusei pagrindo kraštinės.

7.7. Pratimai

Raskite funkcijų apibrėžimo sritis:

1. $z=\dfrac{1}{x-y}$.
2. $z=x+\sqrt{y}$.
3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.
4. $z=\sqrt{xy}$.
5. $z=\ln(-x-y)$.
6. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.
7. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.
8. $z=\sqrt{(x+2)(y-1)}$.
9. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-9}$.
10. $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

Nubraižykite keletą funkcijų lygio linijų:

11. $z=x+3$.
12. $z=x+y$.
13. $z=\dfrac{y}{x}$.
14. $z=\sqrt{xy}$.
15. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.
16. $z=\dfrac{1}{y}$.
17. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
18. $z=y-x^2$.
19. $z=x^2$.
20. $z=x-y^2$.

Raskite pirmosios eilės dalines išvestines ir pilnąjį diferencialą:

21. $z=x^3+y^3-6xy$.

22. $z=\ln(x^2+y^2)$.

23. $z=x^2y+\sin(x^2+\sqrt{y})$.

24. $z=\operatorname{arctg}\frac{3x}{y}+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y$.

25. $z=\frac{xy}{x+y}$.

26. $z=x^2e^{-xy}$.

27. $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

28. $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

29. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

30. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{y}$.

31. $u=xyz+\frac{x}{yz}$.

32. $u=\sqrt{x^2+2xy+z^2}$.

33. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

34. $u=x^3+y^3+z^3-3xyz+5$.

35. $u=\cos(xy+xz+yz)$.

Raskite z'_t:

36. $z=e^{3x+2y}$, $x=\sin t$, $y=t^2$.

37. $z=\frac{y}{x}$, $x=\ln t$, $y=e^t$.

38. $z=\ln\cos\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

39. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$.

40. $z=x^2+xy+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$.

Raskite u'_t:

41. $u=xyz$, $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\operatorname{tg}t$.

42. $u=x^3y+y^2z$, $x=2t+1$, $y=t^2-2$, $z=t-t^2$.

43. $u=e^{y+xz}$, $x=\sin t$, $y=\ln t$, $z=\cos t$.

44. $u=ze^{x+2\sin y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^3$.

45. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=5$.

Raskite z'_u, z'_v:

46. $z=\sqrt{x+y}$, $x=\cos(u-v)$, $y=\sin(u+2v)$.

47. $z=xy^2$, $x=\ln(u+6v)$, $y=e^{u+3v}$.

48. $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$.

49. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.

50. $z=\sin(x^2+y^3)$, $x=u^2+2v$, $y=\frac{u^2}{v}$.

51. Raskite funkcijos $z=2x^2-3y^2$ išvestinę taške $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ kryptimi, sudarančia 135° kampą su ašimi Ox.

52. Raskite funkcijos $z=e^y\sin x$ išvestinę taške $\left(\frac{5\pi}{6}, 3\right)$ kryptimi, sudarančia su ašimi Ox 30° kampą.

53. Raskite funkcijos $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ išvestinę taške (1, 1, 1) vektoriaus $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ kryptimi.

54. Raskite funkcijos $u=xy^2+z^3-xyz$ išvestinę taške (1, 3, 2) kryptimi, sudarančia su koordinačių ašimi atitinkamai 60°, 45°, 60° kampus.

55. Raskite funkcijos $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$ išvestinę taške (1, —3, 4) vektoriaus $\mathbf{a}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$ kryptimi.

56. Raskite funkcijos $z=\ln(x^3-xy^2+4y^3)$ gradientą taške (—3, 3).

57. Raskite funkcijos $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ gradientą taške (1, —2, 2).

58. Raskite funkcijos $z=x^3-y^3$ didžiausią kitimo greitį taške (2, —1).

59. Raskite funkcijos $u=xy^2+xy+z^2$ didžiausią kitimo greitį taške (1, 2, —1).

60. Raskite kampą tarp funkcijų $u=xyz$ ir $v=x^2+9y^2+6z^2$ gradientų taške $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Raskite antrosios eilės dalines išvestines:

61. $z=e^{3x}\cos 2y$.

62. $z=e^{2x+y^3}$.

63. $z=xe^y+ye^x$.

64. $z=y^x$.

65. $z=\sqrt{x+y}$.

Apskaičiuokite Δz ir dz:

66. $z=xy$, kai $x=5$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}2$.

67. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kai $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=-0{,}1$.

68. $z=\frac{y}{y-x}$, kai $x=1$, $y=2$, $\Delta x=\frac{1}{2}$, $\Delta y=-\frac{1}{3}$.

69. Apskaičiuokite apytiksliai:

a) $\sqrt{1{,}03^2+1{,}98^3}$; b) $0{,}95^{3{,}01}$; c) $3{,}97^2\cdot 1{,}02^3$;

d) $\cos 61°\cdot \operatorname{tg} 44°$; e) $\frac{3{,}03}{\sqrt{3{,}03^2+3{,}92^2}}$; f) $\sqrt{2{,}03^2+5e^{0{,}02}}$.

70. Kaip pasikeis stačiakampio, kurio kraštinės $x=6$ m ir $y=8$ m, įstrižainės ilgis ir jo plotas, jeigu pirmąją kraštinę padidinsime 2 cm, o antrąją sumažinsime 5 cm?

71. Kaip pasikeis kūgio tūris, jei pagrindo spindulį $R=20$ cm padidinsime 2 mm, o aukštinę $H=30$ cm sumažinsime 1 mm?

Raskite funkcijų ekstremumus:

72. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

73. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

74. $z=x^2+y^2-12x+16y-5$.

75. $z=2xy-4x-2y$.

76. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

77. $z=x^2-2xy+2y^2+2x$.

78. $z=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

79. $z=4x-4y-x^2-y^2$.

80. $z=x^4+y^4+4x-32y$.

81. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

82. $z=(y-x)^2+(y+2)^3$.

83. $z=(y-x)^2+(x+5)^4$.

84. $z=1-x^4-(y-2)^6$.

85. $z=x^3+y^3$.

86. Raskite koordinates plokštumos xOy taško, kurio atstumų iki trijų tiesių $x=0$, $y=0$ ir $x+2y-16=0$ kvadratų suma yra mažiausia.

87. Kokie turi būti tūrio V cilindro formos dėžutės matmenys, kad jai pagaminti reikėtų mažiausiai skardos?

88. Kokie turi būti kūgio, kurio šoninis paviršius yra S, matmenys, kad jo tūris būtų didžiausias?

89. Kokie turi būti cilindro formos indo, kurio paviršius S, matmenys, kad jo tūris būtų didžiausias?

90. Kokie turi būti kūgio, kurio tūris V, matmenys, kad jo šoninis paviršius būtų mažiausias?

91. Stačiakampio gretasienio briaunų ilgių suma lygi 48 cm. Kokie turi būti gretasienio matmenys, kad jo tūris būtų didžiausias?

92. Teigiamąjį skaičių a taip išskaidykite į trijų skaičių sandaugą, kad tų skaičių suma būtų didžiausia.

93. Teigiamąjį skaičių a taip išskaidykite į 3 dėmenis, kad jų sandauga būtų didžiausia.

94. Kokie turi būti stačiakampio gretasienio, kurio tūris V, matmenys, kad jo visas paviršius būtų mažiausias?

95. Kokie turi būti stačiakampio gretasienio, kurio visas paviršius S, matmenys, kad jo tūris būtų didžiausias?

7.8. Atsakymai

1. Plokštuma, išskyrus tiesę $x-y=0$. **2.** Pirmasis ir antrasis plokštumos ketvirčiai. **3.** Pirmasis plokštumos ketvirtis, išskyrus teigiamąsias pusašes Ox ir Oy. **4.** Pirmasis ir trečiasis plokštumos ketvirčiai. **5.** Plokštumos dalis, esanti žemiau tiesės $x+y=0$. **6.** Plokštumos sritis, esanti tarp pirmojo ir ketvirtojo ketvirčio pusiaukampinių, įskaitant ir pačias pusiaukampines. **7.** Pirmojo ketvirčio plokštumos dalis, apribota parabolės $y=x^2$ ir teigiamosios pusašės Ox. **8.** Plokštumos taškai, kurių koordinatės tenkina nelygybių sistemas $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ y\geqslant 1 \end{cases}$ ir

-2,

9. Plokštumos taškai, kurių koordinatės tenkina nelygybių sistemą $\begin{cases} |x|\leqslant 1, \\ |y|\geqslant 3. \end{cases}$ **10.** Uždarasis žiedas, esantis tarp apskritimų $x^2+y^2=1$ ir $x^2+y^2=4$.

21. $z'_x=3x^2-6y$, $z'_y=3y^2-6x$. **22.** $z'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $z'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$. **23.** $z'_x=2xy+2x\cos(x^2+\sqrt{y})$, $z'_y=x^2+\frac{\cos(x^2+\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$. **24.** $z'_y=\frac{3y}{9x^2+y^2}+\frac{1}{\cos^2 x}$, $z'_y=-\frac{3x}{9x^2+y^2}-\frac{1}{\sin^2 y}$. **25.** $z'_x=\frac{y^2}{(x+y)^2}$, $z'_y=\frac{x^2}{(x+y)^2}$. **26.** $z'_x=xe^{-xy}\times(2-xy)$, $z'_y=-x^3e^{-xy}$. **27.** $z'_x=\frac{x^2-y^2}{x^2y}$, $z'_y=\frac{y^2-x^2}{xy^2}$. **28.** $z'_x=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $z'_y=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$. **29.** $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. **30.** $z'_x=$

$= \dfrac{y}{y^2+(x+y)^2}$, $z'_y = \dfrac{-x}{y^2+(x+y)^2}$. **31.** $u'_x = yz + \dfrac{1}{yz}$, $u'_y = xz - \dfrac{x}{y^2z}$, $u'_z = = xy - \dfrac{x}{yz^2}$. **32.** $u'_x = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+z^2}}$, $u'_y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2xy+z^2}}$, $u'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+2xy+z^2}}$.

33. $u'_x = \dfrac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}$, $u'_y = \dfrac{\ln x}{z} x^{\frac{y}{z}}$, $u'_z = -\dfrac{y \ln x}{z^2} x^{\frac{y}{z}}$. **34.** $u'_x = 3x^2 - 3yz$, $u'_y = = 3y^2 - 3xz$, $u'_z = 3z^2 - 3xy$. **35.** $u'_x = -(y+z)\sin(xy+xz+yz)$, $u'_y = -(x+z)\times \times \sin(xy+xz+yz)$, $u_z = -(x+y)\sin(xy+xz+yz)$. **36.** $e^{3\sin t + 2t^2}(3\cos t + 4t)$.

37. $\dfrac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$. **38.** $\dfrac{-(9t^3+12t)\operatorname{tg}\dfrac{3t^2}{\sqrt[4]{t^2+1}}}{2(t^2+1)\sqrt[4]{t^2+1}}$. **39.** 0. **40.** $\cos 2t$. **41.** $2t\ln t \operatorname{tg} t + + \dfrac{t^2+1}{t}\operatorname{tg} t + \dfrac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. **42.** $-6t^5+45t^4+64t^3-42t^2-54t-8$. **43.** $e^{\ln t + 0{,}5\sin 2t}\times \times\left(\cos 2t + \dfrac{1}{t}\right)$. **44.** $e^{e^t + 2\sin\ln t}(t^3e^t + 2t^2\cos\ln t + 3t^2)$. **45.** 0. **46.** $z'_u = = \dfrac{-\sin(u-v)+\cos(u+2v)}{2\sqrt{\cos(u-v)+\sin(u+2v)}}$, $z'_v = \dfrac{\sin(u-v)+2\cos(u+2v)}{2\sqrt{\cos(u-v)+\sin(u+2v)}}$. **47.** $e^{2u+6v}\times \times\left(\dfrac{1}{u+6v}+2\ln(u+6v)\right)$, $z'_v = 6e^{2u+6v}\left(\dfrac{1}{u+6v}+\ln(u+6v)\right)$. **48.** $z'_u = \dfrac{2}{u}$, $z'_v = = \dfrac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$. **49.** $z_u = 0$, $z_v = 1$. **50.** $z'_u = \cos\left((u^2+2v)^2 + \dfrac{u^6}{v^3}\right)\cdot\left(2(u^2+ +2v)\cdot 2u + \dfrac{6u^5}{v^3}\right)$, $z'_v = \cos\left((u^2+2v)^2+\dfrac{u^6}{v^3}\right)\cdot\left(4(u^2+2v) - \dfrac{3u^6}{v^4}\right)$. **51.** -16.

52. $-0{,}5e^3$. **54.** $2(\sqrt{2}+3)$. **55.** $-\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$. **56.** $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{7}{6}\right)$. **57.** $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. 58. $\sqrt{153}$. **59.** $\sqrt{65}$. **60.** $0°$. **61.** $z''_{xx} = 9e^{3x}\cos 2y$, $z''_{xy} = -6e^{3x}\sin 2y$, $z''_{yy} = -4e^{3x}\cos 2y$. **62.** $z''_{xx} = 4e^{2x+y^3}$, $z''_{xy} = 6y^2e^{2x+y^3}$, $z''_{yy} = e^{2x+y^3}(6y+9y^4)$. **63.** $z''_{xx} = ye^x$, $z''_{xy} = e^y + e^x$, $z''_{yy} = xe^y$. **64.** $z''_{xx} = y^x(\ln y)^2$, $z''_{xy} = y^{x-1}(1+ +x\ln y)$, $z''_{yy} = x(x-1)y^{x-2}$. **65.** $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x+y)^3}}$.

66. $-0{,}62$, $-0{,}6$. **67.** 0,045, 0,04. **68.** 8, $\dfrac{4}{3}$. **69.** a) 2,97; b) 0,86; c) 16,73; d) 0,468; e) 0,61; f) 3,04. **70.** Sumažės 3 cm, sumažės 140 cm². **71.** Padidės $\dfrac{200\pi}{3}$ cm³. **72.** $z_{\min}(-4, 1) = -1$. **73.** $z_{\max}(0, 3) = 9$. **74.** $z_{\min}(6, -8) = -105$. **75.** Ekstremumų nėra. **76.** $z_{\max}(4, 4) = 12$. **77.** $z_{\min}(-2, -1) = -2$. **78.** $z_{\min}(2, 2) = 0$. **79.** $z_{\max}(2, -2) = 8$. **80.** $z_{\min}(-1, 2) = -51$. **81.** $z_{\min}\left(0, -\dfrac{2}{3}\right) = = -\dfrac{4}{3}$. **82.** Ekstremumų nėra. **83.** $z_{\min}(-5, -5) = 0$. **86.** $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$, $d = \dfrac{128}{5}$. **87.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **88.** $R = \sqrt{\dfrac{S\sqrt{3}}{3\pi}}$, $H = \sqrt{\dfrac{2S\sqrt{3}}{3\pi}}$.

89. $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. 90. $H=R\sqrt{2}$. 91. Kubas, kurio briauna lygi 4 cm. 92. $a=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}$. 93. $a=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$. 94. Kubas, kurio briauna lygi $\sqrt[3]{V}$. 95. Kubas, kurio briauna lygi $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

8. DAUGIALYPIAI IR KREIVINIAI INTEGRALAI

Šiame skyriuje trumpai susipažinsime su dvilypio, trilypio ir kreivinio integralų sąvokomis. Griežta tokių integralų teorija labai sudėtinga. Mes be didelio matematinio griežtumo pagrindines formules išvesime remdamiesi vaizdumu. Pagrindinį dėmesį skirsime tų formulių taikymams.

8.1. Cilindroido tūris

Skaičiuodami kreivinės trapecijos plotą, susidūrėme su apibrėžtinio integralo sąvoka. Erdvės kūno tūriui skaičiuoti bus reikalinga dvilypio integralo sąvoka.

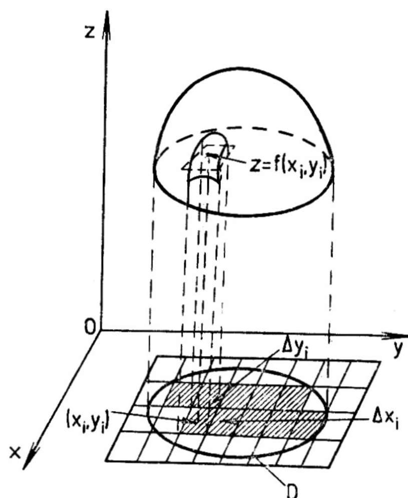
Sakykime, erdvės, kurioje parinkta stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$, kūnas apribotas iš viršaus funkcijos $z=f(x, y)$ ($f(x, y)\geqslant 0$) grafiku, iš šonų — cilindriniu paviršiumi, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz, iš apačios — plokštumos xOy sritimi D (119 pav.). Šis kūnas vadinamas *cilindroidu.* Ieškosime jo tūrio.

Pagrindą D tiesėmis, lygiagrečiomis ašims Ox ir Oy, dalijame į daleles. Nagrinėsime tik tokias daleles D_i ($i=1, 2, 3, \ldots, n$), kurios yra stačiakampiai (119 paveiksle tokios dalelės užbrūkšniuotos). Virš tų stačiakampių nubrėžkime cilindrinius stulpelius ir apskaičiuokime jų tūrius. Tuo tikslu kiekviename stačiakampyje D_i pasirenkame po tašką (x_i, y_i) ir apskaičiuojame funkcijos reikšmes $f(x_i, y_i)$ tuose taškuose. Kiekvieną stulpelį apytiksliai laikydami stačiakampiu gretasieniu, kurio pagrindas D_i, o aukštinė lygi $f(x_i, y_i)$, randame jo tūrį

$$f(x_i, y_i)\Delta x_i\Delta y_i.$$

Cilindroido tūrį V apytiksliai gausime sumuodami visų stulpelių tūrius:

$$V=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i\Delta y_i. \quad (1)$$



119 pav.

(1) lygybės dešiniojoje pusėje esanti suma vadinama *funkcijos* $z=f(x, y)$ *integraline suma*. Stačiakampio D_i įstrižainės ilgį pažymėkime λ_i, o $\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}=\lambda$ (ilgiausios įstrižainės ilgis). Skaidydami figūrą D į vis mažesnius stačiakampius, pereiname prie ribos, kai $\lambda\to 0$, ir gauname tikslią cilindroido tūrio V reikšmę:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i. \qquad (2)$$

Aukštosios matematikos kurse įrodoma, kad tokia riba egzistuoja ir nepriklauso nuo srities D dalijimo būdo bei taškų (x_i, y_i) parinkimo, jei funkcija $z=f(x, y)$ yra tolydi srityje D. Šiame skyriuje ir tenagrinėsime tokias funkcijas.

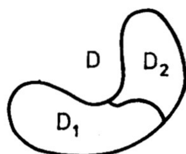
(2) lygybės dešiniojoje pusėje esanti riba vadinama *funkcijos* $z=f(x, y)$ *dvilypiu integralu srityje* D ir žymima

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy.$$

Taigi cilindroido tūris yra išreiškiamas funkcijos $z=f(x, y)$ dvilypiu integralu:

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (3)$$

Reiškinys $dS=dxdy$ vadinamas *ploto elementu stačiakampėje*



120 pav.

koordinačių sistemoje. Jeigu $f(x, y)=1$, tai iš (3) formulės gauname figūros D plotą S:

$$S=\iint_D dS=\iint_D dxdy. \tag{4}$$

Atkreipsime dėmesį, kad dvilypį integralą galima apibrėžti ir kai funkcija nėra teigiama srityje D. Pateiksime be įrodymo pagrindines dvilypio integralo savybes: 1) pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą, t. y.

$$\iint_D kf(x, y)\,dxdy=k\iint_D f(x, y)\,dxdy; \tag{5}$$

2) funkcijų algebrinės sumos integralas lygus tų funkcijų integralų algebrinei sumai, t. y.

$$\iint_D (f(x, y)+g(x, y))\,dxdy=\iint_D f(x, y)\,dxdy+\iint_D g(x, y)\,dxdy; \tag{6}$$

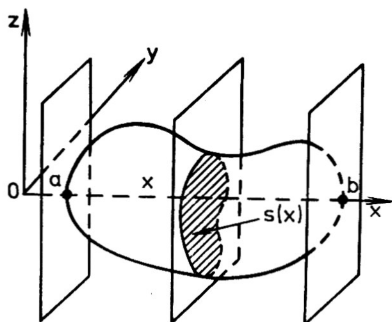
3) jeigu sritis D padalyta į dvi (ar daugiau) sritis D_1 ir D_2 (120 pav.), tai

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy. \tag{7}$$

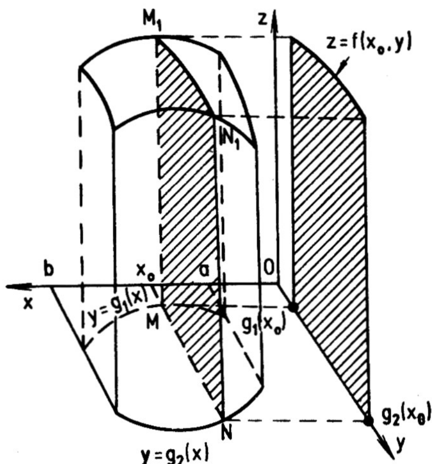
8.2. Dvilypio integralo skaičiavimas

Skaičiuoti dvilypį integralą pagal apibrėžimą gana sunku. Todėl pateiksime kitą paprastesnį būdą integralui skaičiuoti, apsiribodami tik dvilypio integralo geometrine prasme, jį laikydami cilindroido tūriu.

5.2 skyrelyje išvedėme formulę kūno, esančio tarp plokštumų $x=a$ ir $y=b$, tūriui skaičiuoti, kai žinomi jo pjūvių plokštumomis, statmenomis ašiai Ox, plotai $S(x)$ (121 pav.):



121 pav.



122 pav.

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (1)$$

Šią formulę pritaikysime cilindroido tūriui apskaičiuoti. Nagrinėsime du atvejus.

1. Sakykime, kad cilindroido pagrindas D yra kreivinė trapecija: $x=a$, $y=b$, $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$ $(g_1(x)\leqslant g_2(x))$ (122 pav.). Kirtę cilindroidą plokštuma $x=x_0$, pjūvyje gauname kreivinę trapeciją MNN_1M_1. Jos plotą apskaičiuojame naudodamiesi apibrėžtiniu integralu:

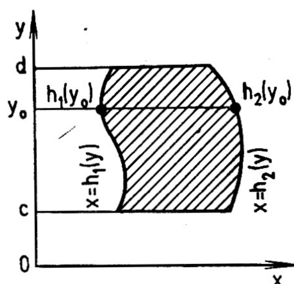
$$S(x_0)=\int_{g_1(x_0)}^{g_2(x_0)} f(x_0,\ y)\,dy.$$

Kadangi pjūvis buvo pasirinktas laisvai, tai bet kurio cilindroido pjūvio, statmeno ašiai Ox, plotas yra

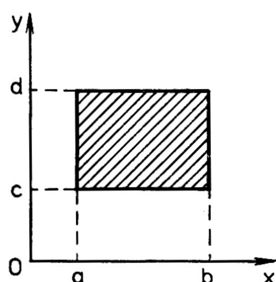
$$S(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,\ y)\,dy. \qquad (2)$$

Taigi cilindroido tūrį galime apskaičiuoti remdamiesi (1) formule:

$$\boxed{V=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx.} \qquad (3)$$



123 pav.



124 pav.

Pagal (3) formulę skaičiuojant cilindroido tūrį, iš pradžių funkcija $f(x, y)$ integruojama pagal y (laikant x pastoviu), o paskui gautoji funkcija integruojama pagal x. Tokia operacija vadinama *kartotiniu integravimu*, o (3) lygybės dešiniojoje pusėje esantis reiškinys — *kartotiniu integralu*. Dažniausiai jis užrašomas šitaip:

$$V=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Palyginę 8.1 skyrelio (3) formulę su šio skyrelio (4) formule, gauname

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

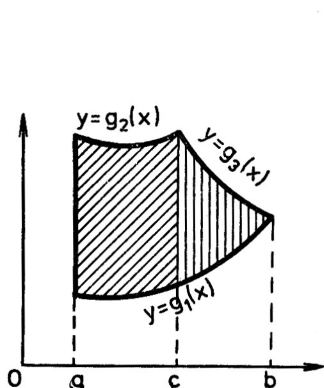
Taigi dvilypį integralą išreiškėme kartotiniu integralu.

2. Jeigu cilindroido pagrindas yra kreivinė trapecija: $y=c$, $y=d$, $x=h_1(y)$, $x=h_2(y)$ $(h_1(y)\leqslant h_2(y))$ (123 pav.), tai, cilindroidą kirtę plokštumomis, statmenomis ašiai Oy ir pasinaudoję 1 atveju, gauname:

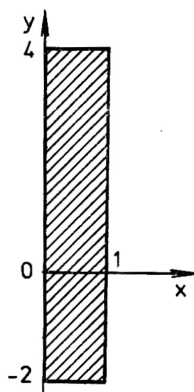
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{6}$$

1 pastaba. Jeigu sritis D yra stačiakampis $[a, b;\ c, d]$, kurio kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims Ox ir Oy (124 pav.), tai (5) ir (6) integralų integravimo rėžiai yra pastovūs ir

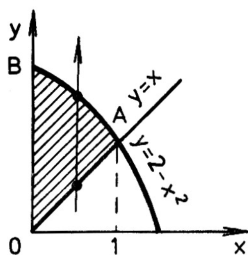
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{7}$$



125 pav.



126 pav.



127 pav.

2 pastaba. Jeigu sritis D yra sudėtinga, tai ji skaidoma į paprastesnes anksčiau nagrinėtas sritis (125 pav.) ir taikoma 8.1 skyrelio (7) formulė.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$; čia D — stačiakampis: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 4$ (126 pav.).

Naudosimės (7) formule:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-2}^4 (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^4 dx =$$

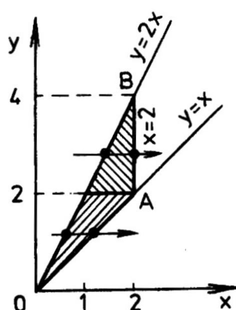
$$= \int_0^1 \left(4x^2+\frac{64}{3}+2x^2+\frac{8}{3}\right)dx = \int_0^1 (6x^2+24)\,dx = \left(\frac{6x^3}{3}+24x\right)\Big|_0^1 = 26.$$

2. Apskaičiuosime integralą $\iint\limits_D 3xy\,dxdy$; čia sritis D apribota kreivėmis $y=x$, $y=2-x^2$, $x=0$ (127 pav.). Parabolė $y=2-x^2$ ir tiesė $y=x$ susikerta taške A (1, 1). Taigi kai x kinta nuo 0 iki 1, y kinta nuo tiesės $y=x$ iki parabolės $y=2-x^2$. Pagal 5 formulę

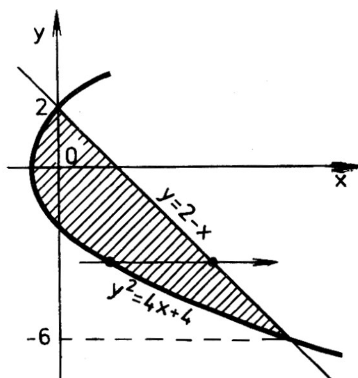
$$\iint\limits_D 3xy\,dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} 3xy\,dy = \int_0^1 \frac{3xy^2}{2}\Big|_x^{2-x^2} dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x\left((2-x^2)^2-x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}x(4-4x^2+x^4-x^2)\,dx = \int_0^1 (6x-7{,}5x^3+1{,}5x^5)\,dx =$$

$$= \left(\frac{6x^2}{2}-\frac{7{,}5x^4}{4}+\frac{1{,}5x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = 3-\frac{15}{8}+\frac{3}{12}=\frac{11}{8}.$$



128 pav.



129 pav.

3. Integrale $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy$ pakeisime integravimo tvarką.

Nubraižome integravimo sritį D: $x=0$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ (128 pav.). Tiesės $y=x$ ir $y=2x$ kertasi taške $0(0, 0)$, tiesė $x=2$ tiesę $y=x$ kerta taške $A(2, 2)$, o tiesę $y=2x$ — taške $B(2, 4)$. Taigi y kinta nuo 0 iki 4. Kai y kinta nuo 0 iki 2, x kinta nuo tiesės $x=\frac{y}{2}$ iki tiesės $x=y$. Kai y kinta nuo 2 iki 4, x kinta nuo tiesės $x=\frac{y}{2}$ iki tiesės $x=2$. Todėl

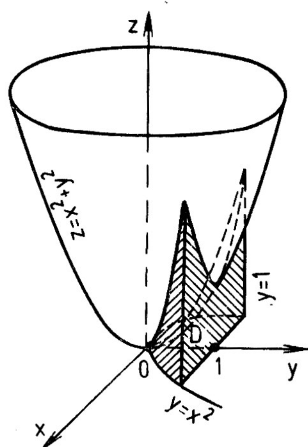
$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$$

4. Apskaičiuosime plotą figūros, apribotos parabole $y^2=4x+4$ ir tiese $y=2-x$ (129 pav.).

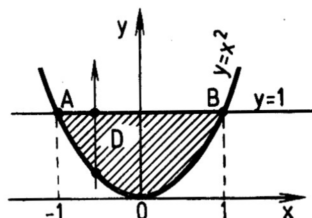
Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} y^2=4x+4, \\ y=2-x, \end{cases}$$

randame parabolės ir tiesės susikirtimo taškų koordinates: $A(0, 2)$ ir $B(8, -6)$. Šiuo atveju racionaliau plotą skaičiuoti pagal (6) formulę (kodėl?). Kai y kinta nuo -6 iki 2, x kinta nuo parabolės $x=\frac{y^2-4}{4}$ iki tiesės $x=2-y$. Todėl



130 pav.



131 pav.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-6}^{2}dy\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dx=\int\limits_{-6}^{2}x\Big|_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dy=\int\limits_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-6}^{2}\left(3-y-\frac{y^2}{4}\right)dy=\left(3y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_{-6}^{2}=\frac{64}{3}.$$

5. Rasime tūrį kūno, apriboto plokštumomis $y=1$, $z=0$, paraboliniu cilindru $y=x^2$ ir paraboloidu $z=x^2+y^2$ (130 pav.).

Šis kūnas yra cilindroidas, apribotas iš viršaus paviršiumi $z=x^2+y^2$, iš šonų — paraboliniu cilindru $y=x^2$ ir plokštuma $y=1$, iš apačios — plokštuma xOy. Cilindroido pagrindas yra sritis D. Kad būtų aiškiau, ieškodami integravimo rėžių sritį D pavaizduosime atskirai (131 pav.). Tiesė $y=1$ parabolę $y=x^2$ kerta taškuose $A(-1,\ 1)$ ir $B(1,\ 1)$. Kai x kinta nuo -1 iki 1, y kinta nuo parabolės $y=x^2$ iki tiesės. Vadinasi,

$$V=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{88}{105}.$$

8.3. Kintamųjų keitimas dvilypiame integrale

Nagrinėsime plokštumos srities Δ atvaizdį į sritį D, apibrėžtą formulėmis (132 pav.)

$$\begin{cases} x=\varphi(u, v), \\ y=\psi(u, v). \end{cases} \tag{1}$$

Jeigu funkcijos $\varphi(u, v)$ ir $\psi(u, v)$ srityje Δ turi tolydžias dalines išvestines φ'_u, φ'_v, ψ'_u, ψ'_v, tai teisinga kintamųjų keitimo formulė

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy=\iint\limits_\Delta f(\varphi(u, v);\ \psi(u, v))\cdot|J(u, v)|\,dudv;} \tag{2}$$

čia

$$J(u, v)=\begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

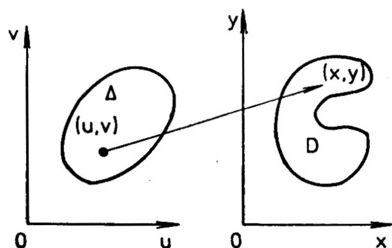
(3) formule apibrėžtas determinantas vadinamas (1) *atvaizdžio jakobianu.*

(2) formulės neįrodinėsime. Remdamiesi (2) formule, kintamuosius x, y keičiame tokiais kintamaisiais u ir v, kad gautasis integralas būtų daug paprasčiau skaičiuojamas. Dažniausiai tenka Dekarto koordinates x, y keisti polinėmis koordinatėmis (r, φ).

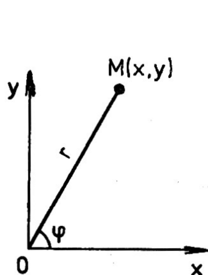
Jeigu ašį Ox laikysime poline ašimi, o koordinačių pradžią — poliumi (133 pav.), tai Dekarto koordinatės su polinėmis koordinatėmis bus susietos šitaip:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi; \end{cases} \tag{4}$$

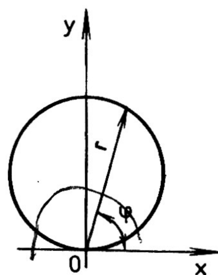
čia $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.



132 pav.



133 pav.



134 pav.

Apskaičiavę (4) atvaizdžio jakobianą

$$J(r, \varphi)=\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r, \qquad (5)$$

(2) formulę perrašome šitaip:

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,dxdy=\iint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi.} \qquad (6)$$

(6) formulė taikoma, kai sritis D yra apribota apskritimo lanku.

Pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

čia D — skritulys $x^2+y^2-2y\leqslant 0$ (134 pav.).

Integralą skaičiuosime polinėse koordinatėse. Srities D kontūras yra apskritimas $x^2+y^2-2y=0$, kurio lygtis polinėse koordinatėse yra

$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2-2r\sin\varphi=0 \text{ arba } r=2\sin\varphi.$$

134 paveiksle matome, kad φ kinta nuo 0 iki π, o r — nuo 0 iki kreivės $r=2\sin\varphi$. Todėl pagal (6) formulę

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\frac{rdr}{\sqrt{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}}=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\frac{rdr}{r}=$$

$$=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}dr=\int_0^\pi r\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\int_0^\pi 2\sin\varphi d\varphi=-2\cos\varphi\Big|_0^\pi=4.$$

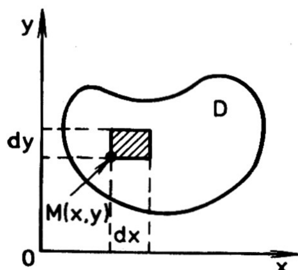
8.4. Dvilypio integralo fizikiniai taikymai

Nagrinėsime labai ploną plokštelę D (135 pav.), kurios tankis $\varrho(x, y)$ nepastovus. Jeigu plokštelės tankis būtų pastovus $\varrho(x, y)=$ $=\varrho$, tai jos masė būtų lygi $m=\varrho\cdot S$, S — plokštelės plotas. Išskirkime labai mažą stačiakampį plokštelės elementą, kurio plotas lygus $dxdy$. Laikysime, kad to elemento tankis pastovus ir lygus $\varrho(x, y)$. Tada elemento masė lygi

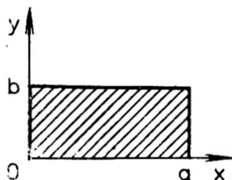
$$dm=\varrho(x, y)\,dxdy. \qquad (1)$$

Šį reiškinį suintegravę srityje D, gausime visos plokštelės masę:

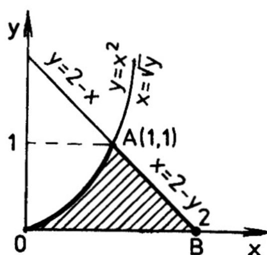
$$\boxed{m=\iint_D \varrho(x, y)\;dxdy.} \qquad (2)$$



135 pav.



136 pav.



137 pav.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime stačiakampės plokštelės, kurios kraštinės a ir b (136 pav.), masę, kai tankis $\varrho(x, y)=xy$.

Pagal (2) formulę

$$m=\int_0^a dx\int_0^b xydy=\int_0^a \frac{xy^2}{2}\Big|_0^b dx=\frac{b^2}{2}\int_0^a xdx=\frac{b^2}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{a^2b^2}{4}.$$

2. Apskaičiuosime plokštelės, apribotos parabole $y=x^2$ ir tiesėmis $y=0$, $y=2-x$ (137 pav.), masę, kai $\varrho(x, y)=x+y$.

Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} y-x^2=0, \\ y+x-2=0 \end{cases}$$

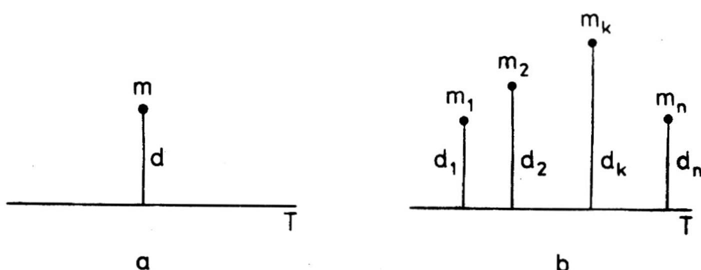
randame taško A koordinates: $A(1, 1)$. Remdamiesi (2) formule, gauname

$$m=\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}(x+y)\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{(2-y)^2}{2}+(2-y)y-\frac{y}{2}-y\sqrt{y}\right)dy=\int_0^1\left(2-\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy=$$

$$=\left(2y-\frac{y^3}{6}-\frac{y^2}{4}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1=2-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{71}{60}.$$

Priminsime iš fizikos, kad masės m taškinio kūno statinis momentas kokios nors ašies atžvilgiu lygus masės m ir to taško atstumo d iki ašies sandaugai: $M=m\cdot d$ (138 pav., a); taškinių kūnų, kurių masės yra $m_1, m_2, \ldots, m_n$, o atstumai iki ašies atitinkamai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, sistemos statinis momentas lygus tų kūnų statinių momentų sumai: $M=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot d_k$ (138 pav., b). Šiais faktais remsimės skaičiuodami plokštelės D, kurios tankis $\varrho(x, y)$,



138 pav.

statinius momentus ašių Ox ir Oy atžvilgiu. Laikysime, kad 135 paveiksle išskirto stačiakampio elemento masė

$$dm=\varrho(x,\ y)\,dxdy$$

sukoncentruota taške $M(x,\ y)$. Tada šio elemento statiniai momentai ašių Ox ir Oy atžvilgiu atitinkamai lygūs

$$dM_x=y\cdot\varrho(x,\ y)\,dxdy,\quad dM_y=x\cdot\varrho(x,\ y)\,dxdy.$$

Gautuosius reiškinius suintegravę srityje D, gauname *plokštelės statinius momentus ašių* Ox ir Oy atžvilgiu:

$$\boxed{M_x=\iint\limits_D y\varrho(x,\ y)\,dxdy,\quad M_y=\iint\limits_D x\varrho(x,\ y)\,dxdy.} \qquad (3)$$

Žinant plokštelės statinius momentus ir masę, nesunku apskaičiuoti tos plokštelės sunkio centro koordinates. Sunkio centro koordinatės x_c ir y_c apibrėžiamos lygybėmis

$$x_c\cdot m=M_y,\quad y_c\cdot m=M_x.$$

Iš čia, remdamiesi (2) ir (3) lygybėmis, gauname:

$$\boxed{x_c=\frac{\iint\limits_D x\varrho(x,\ y)\,dxdy}{\iint\limits_D \varrho(x,\ y)\,dxdy},\quad y_c=\frac{\iint\limits_D y\varrho(x,\ y)\,dxdy}{\iint\limits_D \varrho(x,\ y)\,dxdy}.} \qquad (4)$$

Jeigu plokštelė homogeninė (tankis pastovus), tai (4) formulės supaprastėja:

$$\boxed{x_c=\frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy},\quad y_c=\frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.} \qquad (5)$$

3 **pavyzdys.** Apskaičiuosime homogeninės plokštelės, apribotos tiesėmis $y=x$, $y=4-x$, $x=0$ (139 pav.), sunkio centro koordinates.

Remsimės (5) formulėmis. Kadangi

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_x^{4-x} x\,dy=\int_0^2 xy\Big|_x^{4-x}dx=\int_0^2 x(4-x-x)\,dx=$$

$$=\int_0^2 (4x-2x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3};$$

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_x^{4-x} y\,dy=\int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_x^{4-x}dx=\int_0^2\left(\frac{(4-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^2 (8-4x)\,dx=(8x-2x^2)\Big|_0^2=8;$$

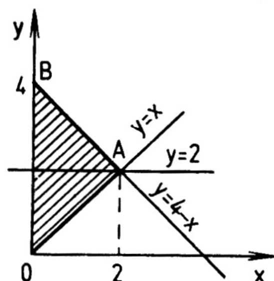
$$\iint_D dx\,dy=\int_0^2 dx\int_x^{4-x} dy=\int_0^2 y\Big|_x^{4-x}dx=\int_0^2 (4-x-x)\,dx=\int_0^2 (4-2x)\,dx=$$

$$=(4x-x^2)\Big|_0^2=4,$$

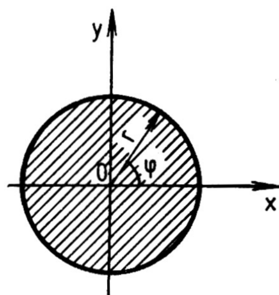
tai

$$x_c=\frac{8}{3\cdot 4}=\frac{2}{3},\quad y_c=\frac{8}{4}=2.$$

Pastaba. Jeigu homogeninė figūra yra simetrinė kokios nors tiesės atžvilgiu, tai figūros sunkio centras yra toje tiesėje. 3 pavyzdyje trikampis OAB yra simetrinis tiesės $y=2$ atžvilgiu. Įsitikinome, kad sunkio centras priklauso tiesei $y=2$ ($y_c=2$).



139 pav.



140 pav.

Yra žinoma, kad taškinio masės m kūno inercijos momentas ašies atžvilgiu lygus to kūno atstumo iki ašies kvadrato d^2 ir masės sandaugai:

$$M = m \cdot d^2.$$

Samprotaujame panašiai, kaip ir ieškodami plokštelės statinių momentų, ir įsitikiname, kad nehomogeninės plokštelės D, kurios tankis $\varrho(x, y)$, inercijos momentai koordinačių ašių Ox ir Oy atžvilgiu yra:

$$I_x = \iint_D y^2 \varrho(x, y)\,dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \varrho(x, y)\,dxdy. \tag{6}$$

Dydis $I_0 = I_x + I_y$ vadinamas *plokštelės inercijos momentu koordinačių pradžios atžvilgiu*. Iš (6) formulių išplaukia

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\varrho(x, y)\,dxdy. \tag{7}$$

Pavyzdžiai. 4. Apskaičiuosime stačiakampio $D = [0, 1; 1, 3]$ inercijos momentą ašies Ox atžvilgiu, kai $\varrho(x, y) = x + y$.

Pagal (6) formulę

$$I_x = \iint_D y^2(x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_1^3 y^2(x+y)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_1^3 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{26}{3}x + 20\right)dx = \left(\frac{26x^2}{6} + 20x\right)\Big|_0^1 = 24\frac{1}{3}.$$

5. Apskaičiuosime skritulio, kurio spindulys a, o centras — koordinačių pradžioje, inercijos momentą koordinačių pradžios atžvilgiu, kai $\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (140 pav.).

Inercijos momentą I_0 skaičiuosime remdamiesi (7) formule polinėje koordinačių sistemoje. Skritulį ribojančio apskritimo lygtis stačiakampėje koordinačių sistemoje yra $x^2 + y^2 = a^2$. Rasime šio apskritimo lygtį polinėje koordinačių sistemoje. Turime:

$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = a^2$, arba $r = a$.

Kadangi koordinačių pakeitimo jakobianas lygus r, o 140 paveiksle matome, kad φ kinta nuo 0 iki 2π, r kinta nuo 0 iki a, tai

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sqrt{r^2}\, r\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^4\,dr = \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi a^5}{5}.$$

8.5. Trilypiai integralai

8.5.1. Trilypio integralo apibrėžimas ir skaičiavimas naudojantis kartotiniu integravimu. Funkcijos $u=f(x, y, z)$ trilypis integralas apibrėžiamas panašiai kaip ir funkcijos $f(x, y)$ dvilypis integralas.

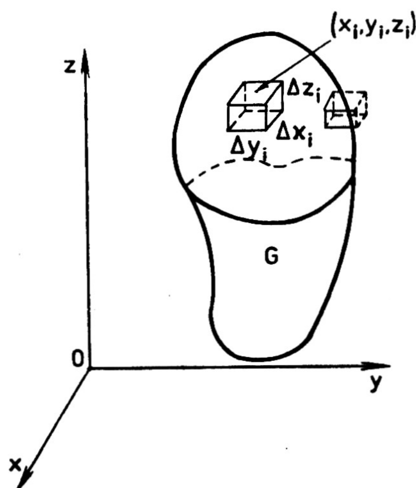
Sakykime, erdvės, kurioje parinkta stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$, srityje G (141 pav.) apibrėžta funkcija $u=f(x, y, z)$. Sritį G plokštumomis, lygiagrečiomis koordinačių plokštumoms Oxy, Oxz, Oyz dalijame į daleles. Nagrinėsime tik tokias daleles, kurios yra stačiakampiai gretasieniai $G_i (i=1, 2, \ldots, n)$, kurių tūriai lygūs $\Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Gretasienio G_i įstrižainės ilgį pažymėkime λ_i ir $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\lambda_i\}$. Kiekviename gretasienyje G_i parinkime po tašką (x_i, y_i, z_i) ir sudarykime sumą

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i. \quad (1)$$

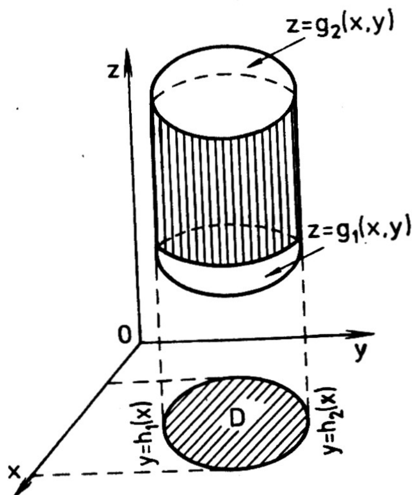
Jeigu srities G padalijimus taip smulkinsime, kad $\lambda \to 0$, tai sumos σ ribą vadinsime trilypiu integralu ir žymėsime:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iiint\limits_{G} f(x, y, z)\, dx dy dz. \quad (2)$$

Kaip ir nagrinėjant dvilypį integralą, įrodoma, kad tokia riba egzistuoja ir nepriklauso nuo srities G padalijimo būdo ir taškų



141 pav.



142 pav.

(x_i, y_i, z_i) parinkimo, jeigu funkcija $u=f(x, y, z)$ yra tolydi srityje G.

Reiškinys $dV=dxdydz$ vadinamas *tūrio elementu*. Jeigu $f(x, y, z)\equiv 1$, tai integralu

$$\boxed{V=\iiint\limits_G dV=\iiint\limits_G dxdydz} \qquad (3)$$

išreiškiamas kūno G tūris.

Jeigu kūnas G yra nehomogeninis ir $f(x, y, z)=\varrho(x, y, z)$ — jo tankis, tai trilypiu integralu

$$m=\iiint\limits_G \varrho(x, y, z)\,dxdydz \qquad (4)$$

išreiškiama kūno G masė.

Kaip ir dvilypis integralas, trilypis integralas skaičiuojamas kartotiniu integravimu.

Sakykime, G yra cilindroidas, apribotas iš apačios paviršiumi $z=g_1(x, y)$, iš viršaus — paviršiumi $z=g_2(x, y)$, iš šonų — cilindriniu paviršiumi, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (142 pav.).

Jeigu kūno G projekcija plokštumoje xOy yra sritis D, tai

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.} \qquad (5)$$

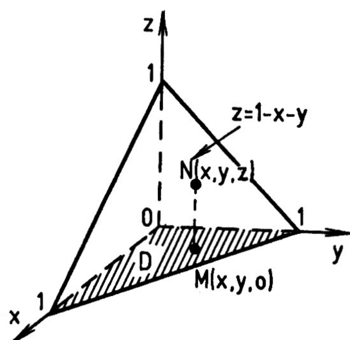
Kai sritis D yra apribota kreivėmis $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ $(h_1(x)\leqslant h_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b)$, tai (5) formulę užrašome šitaip:

$$\boxed{\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy\int\limits_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.} \qquad (6)$$

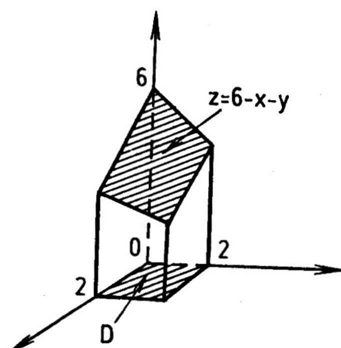
Taigi trilypis integralas apskaičiuojamas tris kartus integruojant (pirmiausia pagal z, paskui pagal y ir galiausiai pagal x). Priklausomai nuo cilindroido formos, integravimo tvarka gali būti ir kitokia.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime piramidės G, apribotos plokštumomis $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (143 pav.), masę, jeigu tankis taške $M(x, y, z)$ lygus $\varrho(x, y, z)=x$.

Piramidės projekcija į plokštumą xOy yra trikampis D, apribotas tiesėmis $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Kai $(x, y)\in D$, z kinta



143 pav.



144 pav.

nuo plokštumos $z=0$ iki plokštumos $z=1-x-y$. Todėl pagal (4) formulę

$$m=\iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_0^{1-x-y} x\,dz=\iint\limits_D xz\Big|_0^{1-x-y}dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D x(1-x-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x-x^2-xy)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(xy-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int\limits_0^1\left(x(1-x)-x^2(1-x)-\frac{x(1-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{24};$$

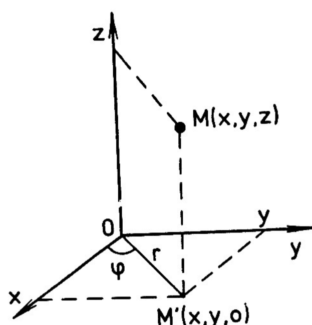
2. Apskaičiuosime tūrį kūno, apriboto plokštumomis: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $x+y+z=6$ (144 pav.).

Kūno projekcija į plokštumą xOy yra kvadratas D: $[0, 2; 0, 2]$. Kai $(x, y)\in D$, z kinta nuo plokštumos $z=0$ iki plokštumos $z=6-x-y$. Taigi

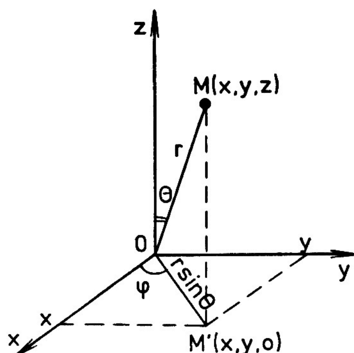
$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_0^{6-x-y}dz=\iint\limits_D z\Big|_0^{6-x-y}dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D(6-x-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2(6-x-y)\,dy=\int\limits_0^2\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2dx=$$

$$=\int\limits_0^2(10-2x)\,dx=(10x-x^2)\Big|_0^2=16.$$



145 pav.



146 pav.

8.5.2. Kintamųjų keitimas trilypiame integrale. Trilypiame integrale stačiakampes koordinates dažnai tenka keisti cilindrinėmis ar sferinėmis koordinatėmis.

Cilindrinėje koordinačių sistemoje erdvės taško M padėtis nustatoma taško M projekcijos M' plokštumoje xOy polinėmis koordinatėmis r, φ ir aplikate z (145 pav.). Skaičiai r, φ, z vadinami taško M *cilindrinėmis koordinatėmis.* Aišku, kad $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ir z — bet koks realusis skaičius. Remdamiesi 145 paveikslu, nesunkiai gauname ryšį tarp stačiakampių ir cilindrinių koordinačių:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{9}$$

Sferinėje koordinačių sistemoje taško M padėtis erdvėje nustatoma to taško atstumu iki koordinačių pradžios, kampu φ tarp ašies Ox ir OM projekcijos OM' plokštumoje xOy ir kampu θ tarp OM ir ašies Oz. Skaičių (r, φ, θ) trejetas vadinamas taško M *sferinėmis koordinatėmis* (146 pav.). Paveiksle matome, kad $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta < \pi$ ir

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ x = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{8}$$

Aukštosios matematikos kurse įrodoma šitokia teorema: jeigu tarp dviejų erdvės sričių Δ ir G formulėmis

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \tag{7}$$

apibrėžiamas atvaizdis, kurio jakobianas yra

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0,$$

tai teisinga kintamųjų keitimo formulė

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|J|\,dudvdw. \qquad (10)$$

Nesunku apskaičiuoti, kad atvaizdžio, apibrėžto (7) formulėmis, jakobianas yra

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \qquad (11)$$

o atvaizdžio, apibrėžto (8) formulėmis, jakobianas —

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \qquad (12)$$

Remdamiesi (11) lygybe, (10) formulę cilindrinėje koordinačių sistemoje užrašysime **šitaip:**

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz. \qquad (13)$$

(10) formulė sferinėje koordinačių sistemoje užrašoma šitaip:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\cdot d\varphi\cdot d\theta \qquad (14)$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime tūrį kūno, apriboto paraboloidu $2z=x^2+y^2$ ir plokštuma $z=2$ (147 pav.).

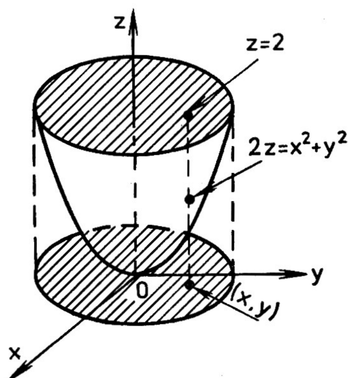
Šio kūno projekcija į plokštumą xOy yra skritulys D: $x^2+y^2\leqslant 4$ (skritulio kontūro lygtis gaunama iš paraboloido lygties $2z=x^2+y^2$ ir plokštumos lygties $z=2$, eliminavus z: $x^2+y^2=2\cdot 2$, t. y. $x^2+y^2=4$). Tūrį skaičiuosime cilindrinėje koordinačių sistemoje. Paraboloido lygtis šioje sistemoje yra

$$2z=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2, \text{ t. y. } z=\frac{r^2}{2},$$

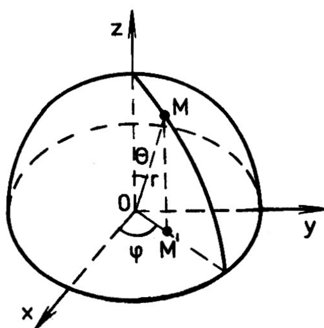
o skritulio D kontūro lygtis —

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4, \text{ t. y. } r=2.$$

Kai skritulyje D φ kinta nuo 0 iki 2π, r kinta nuo 0 iki 2, tuomet z kinta nuo paraboloido $z=\frac{r^2}{2}$ iki plokštumos $z=2$.



147 pav.



148 pav.

Taigi pagal (13) formulę $(f(x, y, z) \equiv 1)$:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rz \Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2r - \frac{r^3}{2}\right) dr = \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Pastaba. Kadangi kūnas yra simetriškas koordinačių plokštumų xOz, yOz atžvilgiu, tai galima rasti šio kūno ketvirčio, esančio pirmajame oktante, tūrį ir jį padauginti iš 4.

2. Apskaičiuosime pusrutulio $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ $(z \geqslant 0)$ masę, kai tankis $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (148 pav.)

Integralą skaičiuosime sferinėje koordinačių sistemoje. Kadangi

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2,$$

tai sferos lygtis yra $r=a$. Kai φ kinta nuo 0 iki 2π, θ — nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$, tai r kinta nuo 0 iki a. Vadinasi,

$$m = \iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2} r^2 \sin\theta dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{\pi a^4}{2}\left(-\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi a^4}{2}.$$

8.5.3. Trilypio integralo fizikiniai taikymai. Kūno G, kurio tankis $\varrho(x, y, z)$, masė skaičiuojama pagal 8.5.1 skyrelio (4) formulę.

Šio kūno inercijos momentai koordinačių plokštumų atžvilgiu skaičiuojami pagal formules

$$\begin{aligned} I_{xOz} &= \iiint_G y^2 \varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ I_{xOy} &= \iiint_G z^2 \varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ I_{yOz} &= \iiint_G x^2 \varrho(x, y, z)\,dxdydz, \end{aligned} \tag{15}$$

inercijos momentas koordinačių pradžios atžvilgiu —

$$I_0 = \iiint_G (x^2+y^2+z^2)\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \tag{16}$$

o inercijos momentai koordinačių ašių atžvilgiu — pagal formules

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \iiint_G (y^2+z^2)\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ I_{Oy} &= \iiint_G (x^2+z^2)\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ I_{Oz} &= \iiint_G (x^2+y^2)\varrho(x, y, z)\,dxdydz. \end{aligned} \tag{17}$$

Kūno G statiniams momentams koordinačių plokštumų atžvilgiu skaičiuoti naudojamos formulės

$$\begin{aligned} M_{yOz} &= \iiint_G x\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ M_{xOz} &= \iiint_G y\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \\ M_{xOy} &= \iiint_G z\varrho(x, y, z)\,dxdydz, \end{aligned} \tag{18}$$

o sunkio centrui (x_c, y_c, z_c) skaičiuoti — formulės

$$x_c = \frac{M_{yOz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xOz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xOy}}{m}. \tag{19}$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime homogeninio kūno, apriboto paraboloidu $2z=x^2+y^2$ ir plokštuma $z=2$ (147 pav.), sunkio centro koordinates.

Laikysime $\varrho(x, y, z)=1$. 8.5.2 skyrelio 1 pavyzdyje apskaičiavome šio kūno tūrį. Jis lygus 4π. Kadangi $\varrho=1$, tai ir $m=4\pi$. Homogeninis kūnas simetriškas ašies Oz atžvilgiu, todėl jo centras yra toje ašyje, t. y. $x_c=y_c=0$, o

$$z_c=\frac{\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz}{m}=\frac{\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 rz\,dz}{4\pi}=$$

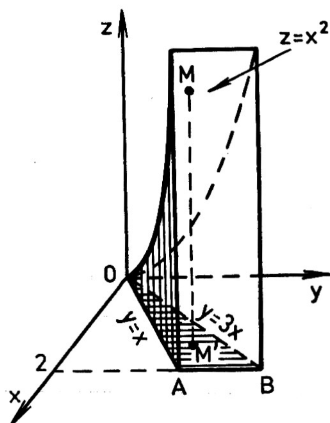
$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r\left(2-\frac{r^4}{8}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2r-\frac{r^5}{8}\right)dr=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^6}{8\cdot 6}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(4-\frac{64}{8\cdot 6}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\,\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8\cdot 2\pi}{4\pi\cdot 3}=\frac{4}{3}.$$

2. Rasime homogeninio kūno ($\varrho=1$), apriboto plokštumomis $z=0$, $z=x$, $z=3x$, $x=2$ ir cilindriniu paviršiumi $z=x^2$, inercijos momentą ašies Oy atžvilgiu (149 pav.).

Kūno projekcija plokštumoje xOy yra trikampis OAB. Kai tame trikampyje x kinta nuo 0 iki 2, y — nuo tiesės $y=x$ iki tiesės



149 pav.

$y=3x$, tai z kinta nuo plokštumos $z=0$ iki parabolinio cilindro $z=x^2$. Vadinasi,

$$I_{Oy}=\iiint\limits_G (x^2+z^2)\,dxdydz=\int_0^2 dx\int_x^{3x} dy\int_0^{x^2}(x^2+z^2)\,dz=$$

$$=\int_0^2 dx\int_x^{3x}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{x^2} dy=\int_0^2 dx\int_x^{3x}\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dy=$$

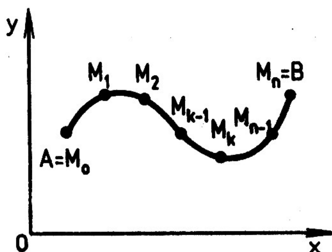
$$=\int_0^2\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)y\Big|_x^{3x} dx=2\int_0^2\left(x^5+\frac{x^7}{3}\right)dx=2\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right)\Big|_0^2=\frac{128}{3}.$$

8.6. Kreiviniai integralai

Anksčiau nagrinėjome apibrėžtinį, dvilypį ir trilypį integralus. Jų apibrėžimo sritys buvo atitinkamai atkarpos, plokštumos ir erdvės sritys. Šiame skyrelyje susipažinsime su integralais, kurių apibrėžimo sritys yra plokštumos arba erdvės kreivės. Nagrinėsime dviejų tipų integralus.

8.6.1. Pirmojo tipo kreiviniai integralai. Nagrinėsime plokščiąją materialią kreivę (AB), kurios tankis kiekviename jos taške (x, y) yra $\varrho(x, y)$. Apskaičiuosime šios kreivės masę. Jeigu kreivė homogeninė, t. y. $\varrho(x, y)=\varrho$, tai jos masė yra $m=\varrho\cdot L$; čia L — kreivės (AB) ilgis.

Kreivę (AB) taškais $A=M_0$, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, $M_n=B$, kurių koordinatės $M_k(x_k, y_k)$, $k=1, 2, \dots, n$, padalijame į n dalių (150 pav.). Lankelio $M_{k-1}M_k$ ilgį pažymėkime Δs_k ir $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta s_k\}$. Jeigu lankelio $M_{k-1}M_k$ ilgis pakankamai mažas, tai galima laikyti, kad šiame lankelyje tankis yra pastovus ir lygus tankiui bet kuria-



150 pav.

me šio lankelio taške, pavyzdžiui, taške $M_k(x_k, y_k)$. Tuomet šio lankelio masė apytiksliai lygi

$$m_k \approx \varrho(x_k, y_k)\Delta s_k.$$

Kreivės (AB) masę gausime susumavę visų lankelių mases:

$$m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \varrho(x_k, y_k)\Delta s_k.$$

Tikslią m reikšmę gausime perėję prie ribos, kai $\lambda \to 0$, t. y.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varrho(x_k, y_k)\Delta s_k. \qquad (1)$$

Sumą $\sum_{k=1}^{n} \varrho(x_k, y_k)\Delta s_k$ vadinsime *funkcijos* $\varrho(x, y)$ *integraline suma kreivėje* (AB), o (1) lygybės dešiniojoje pusėje esančią ribą — tos *funkcijos pirmojo tipo kreiviniu integralu* ir žymėsime

$$\int\limits_{(AB)} \varrho(x, y)\,ds.$$

Taigi

$$\boxed{m = \int\limits_{(AB)} \varrho(x, y)\,ds.} \qquad (2)$$

Kai $\varrho(x, y) = 1$, integralas

$$\int\limits_{(AB)} ds = L \qquad (3)$$

reiškia kreivės (AB) ilgį.

Pažymėsime, kad anksčiau aprašytu būdu galima apibrėžti integralinę sumą imant bet kokią funkciją $f(x, y)$, apibrėžtą kreivėje (AB): $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k$, ir šios funkcijos pirmojo tipo kreivinį integralą kreivėje (AB).

Pirmojo tipo kreivinis integralas pasižymi šiomis savybėmis:

1) $$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds = \int\limits_{(BA)} f(x, y)\,ds; \qquad (4)$$

2) jeigu taškas C kreivę (AB) dalija į dvi dalis (AC) ir (CB), tai

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds = \int\limits_{(AC)} f(x, y)\,ds + \int\limits_{(CB)} f(x, y)\,ds. \qquad (5)$$

Aukštosios matematikos kurse įrodoma ši teorema.

1 teorema. *Jeigu funkcija* $z=f(x, y)$ *yra tolydi, o kreivė* (AB) *apibrėžta parametrinėmis lygtimis*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

čia $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ *— tolydžiosios funkcijos, tai teisinga formulė, pagal kurią kreivinis integralas keičiamas apibrėžtiniu integralu:*

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{6}$$

Atskiru atveju, kai kreivės (AB) lygtis yra

$$y=g(x),\ a\leqslant x\leqslant b,$$

(6) lygybė virsta šitokia:

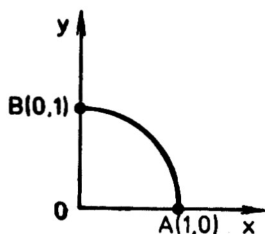
$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds=\int\limits_{a}^{b} f(x, g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx. \tag{7}$$

Jeigu kreivės (AB) lygtis yra

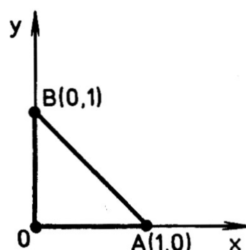
$$x=h(y),\ c\leqslant y\leqslant d,$$

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds=\int\limits_{c}^{d} f(h(y), y)\sqrt{h'^2(y)+1}\,dy. \tag{8}$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(AB)} xyds$, kai (AB) – apskritimo $x^2+y^2=1$ lankas, esantis pirmajame ketvirtyje (151 pav.).



151 pav.



152 pav.

Kadangi apskritimo parametrinės lygtys yra

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

tai pagal (6) formulę

$$\int\limits_{(AB)} xyds=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{(\cos' t)^2+(\sin' t)^2}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin td(\sin t)=\frac{1}{2}(\sin t)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

2. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(L)}(x+y)ds$, kai (L) — trikampio OAB kraštinės (152 pav.).

Pagal pirmojo tipo kreivinio integralo 2 savybę

$$\int\limits_{(L)}(x+y)ds=\int\limits_{(OA)}(x+y)ds+\int\limits_{(AB)}(x+y)ds+\int\limits_{(BO)}(x+y)ds.$$

Gautuosius integralus apskaičiuosime remdamiesi (7) ir (8) formulėmis.

Atkarpos OA lygtis yra: $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, todėl

$$\int\limits_{(OA)}(x+y)ds=\int\limits_0^1(x+0)\sqrt{1+0^2}dx=\int\limits_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Atkarpos AB lygtis yra: $y=1-x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, todėl

$$\int\limits_{(AB)}(x+y)ds=\int\limits_0^1(x+1-x)\sqrt{1+(1-x)'^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\sqrt{2}dx=\sqrt{2}x\Big|_0^1=\sqrt{2}.$$

Atkarpos BO lygtis yra $x=0$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Šiuo atveju

$$\int\limits_{(BO)}(x+y)ds=\int\limits_0^1(0+y)\sqrt{0^2+1}dy=\int\limits_0^1 ydy=\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Taigi

$$\int\limits_{(L)}(x+y)ds=\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}=\sqrt{2}+1.$$

Analogiškai apibrėžiamas funkcijos $u=f(x, y, z)$, kuri apibrėžta erdvės kreivėje (L), pirmojo tipo kreivinis integralas. Panašiai kaip **1** teorema įrodoma ir **2** teorema.

2 teorema. *Jeigu funkcija $u=f(x, y, z)$ tolydi, o kreivės (L) parametrinės lygtys yra*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

$\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t),\ \varphi'(t),\ \psi'(t),\ \chi'(t)$ — *tolydžiosios funkcijos, tai*

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,ds=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \qquad (9)$$

Kai $f(x, y, z)=1$, iš (9) formulės gauname formulę kreivės lanko ilgiui skaičiuoti:

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \qquad (10)$$

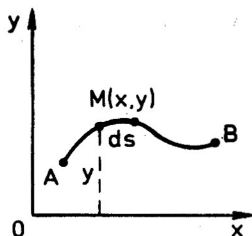
3 pavyzdys. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(L)}(2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds$; čia (L): $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Remsimės (9) formule:

$$\int\limits_{(L)}(2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds=$$
$$=\int\limits_{0}^{2\pi}(2t-\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\cdot\sqrt{(t\cos t)'^2+(t\sin t)'^2+(t')^2}\,dt=$$
$$=\int\limits_{0}^{2\pi}(2t-t)\sqrt{2+t^2})\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi}=$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{(2+4\pi^2)^3}-\sqrt{8}).$$

8.6.2. Pirmojo tipo kreivinio integralo fizikiniai taikymai. Nagrinėsime plokščiąją materialią kreivę (L), kurios tankis kiekviename jos taške $M(x, y)$ yra $\varrho(x, y)$. Išskirkime šios kreivės lanko elementą ds ir laikykime, kad šio elemento tankis yra pastovus ir lygus tankiui taške $M(x, y)$ (153 pav.). Tuomet šio elemento masė lygi

$$dm=\varrho(x, y)\,ds.$$



153 pav.

Šį reiškinį suintegravę kreive (L), gausime visos kreivės masę:

$$m=\int_{(L)}\varrho(x,\ y)\,ds.$$

Jeigu laikysime, kad išskirto elemento masė sukoncentruota taške M, tai to elemento statiniai momentai ašių Ox ir Oy atžvilgiu yra

$$dM_{Ox}=y\,dm=y\varrho(x,\ y)\,ds,\quad dM_{Oy}=x\,dm=x\varrho(x,\ y)\,ds.$$

Visos kreivės statinius momentus gausime suintegravę šiuos reiškinius kreive (L):

$$M_{Ox}=\int_{(L)}y\varrho(x,\ y)\,ds,\quad M_{Oy}=\int_{(L)}x\varrho(x,\ y)\,ds. \tag{11}$$

Plokščiosios kreivės sunkio centro koordinatės apskaičiuojamos pagal formules

$$x_c=\frac{M_{Oy}}{m}=\frac{\int_{(L)}x\varrho(x,\ y)\,ds}{\int_{(L)}\varrho(x,\ y)\,ds},\quad y_c=\frac{M_{Ox}}{m}=\frac{\int_{(L)}y\varrho(x,\ y)\,ds}{\int_{(L)}\varrho(x,\ y)\,ds}, \tag{12}$$

o inercijos momentai koordinačių ašių ir centro atžvilgiu — atitinkamai pagal formules

$$I_{Ox}=\int_{(L)}y^2\varrho(x,\ y)\,ds,\quad I_{Oy}=\int_{(L)}x^2\varrho(x,\ y)\,ds,$$
$$I_O=\int_{(L)}(x^2+y^2)\varrho(x,\ y)\,ds. \tag{13}$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime apskritimo $x^2+y^2=4$ lanko, esančio virš ašies Ox, masę, sunkio centro koordinates ir inercijos momentą I_{Ox}, jei $\varrho(x,\ y)=y$.

Apskritimo parametrinės lygtys yra $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$. Remdamiesi (2), (11), (12) ir (13) formulėmis, gauname

$$m=\int_0^{\pi} 2\sin t\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}dt=$$

$$=4\int_0^{\pi}\sin t dt=-4\cos t\Big|_0^{\pi}=8,$$

$$M_{Ox}=\int_0^{\pi} y^2 ds=\int_0^{\pi} 4\sin^2 t\cdot 2dt=4\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=4\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}=4\frac{1}{2}\pi=2\pi,$$

$$M_{Oy}=\int_{(L)} xyds=\int_{(L)} 2\cos t\cdot 2\sin t\cdot 2dt=8\int_0^{\pi}\sin t d(\sin t)=$$

$$=8\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi}=0.$$

Taigi

$$x_c=\frac{M_{Oy}}{m}=0,\ y_c=\frac{M_{Ox}}{m}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

$$I_{Ox}=\int_0^{\pi} y^2\cdot yds=\int_0^{\pi} 8\sin^3 t\cdot 2dt=-16\int_0^{\pi}\sin^2 t d(\cos t)=$$

$$=-16\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\cdot d(\cos t)=-16\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}.$$

Jeigu materiali kreivė (L) yra erdvėje ir jos tankis lygus $\varrho(x, y, z)$, tai kreivės masę rasime pagal formulę

$$\boxed{m=\int_{(L)}\varrho(x, y, z)ds,} \qquad (14)$$

statinius momentus koordinačių plokštumų atžvilgiu — pagal formules

$$\boxed{\begin{gathered} M_{xOy}=\int_{(L)} z\varrho(x, y, z)ds,\\ M_{xOz}=\int_{(L)} y\varrho(x, y, z)ds,\ M_{yOz}=\int_{(L)} x\varrho(x, y, z)ds,\end{gathered}} \qquad (15)$$

sunkio centro koordinates — pagal formules

$$x_C=\frac{M_{yOz}}{m}=\frac{\int\limits_{(L)} x\varrho(x,y,z)ds}{\int\limits_{(L)} \varrho(x,y,z)ds},\quad y_C=\frac{M_{xOz}}{m}=\frac{\int\limits_{(L)} y\varrho(x,y,z)ds}{\int\limits_{(L)} \varrho(x,y,z)ds},$$
$$z_C=\frac{M_{xOy}}{m}=\frac{\int\limits_{(L)} z\varrho(x,y,z)ds}{\int\limits_{(L)} \varrho(x,y,z)ds}, \qquad (16)$$

inercijos momentus koordinačių ašių atžvilgiu — pagal formules

$$I_{Ox}=\int\limits_{(L)}(y^2+z^2)\varrho(x,y,z)ds,\quad I_{Oy}=\int\limits_{(L)}(x^2+z^2)\varrho(x,y,z)ds,$$
$$I_{Oz}=\int\limits_{(L)}(x^2+y^2)\varrho(x,y,z)ds \qquad (17)$$

ir inercijos momentą koordinačių pradžios atžvilgiu — pagal formulę

$$I_0=\int\limits_{(L)}(x^2+y^2+z^2)\varrho(x,y,z)ds. \qquad (18)$$

5 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivės (L), kurios parametrinės lygtys yra $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, $0\leqslant t\leqslant 1$, masę, jeigu $\varrho(x,y,z)=2$. Kadangi

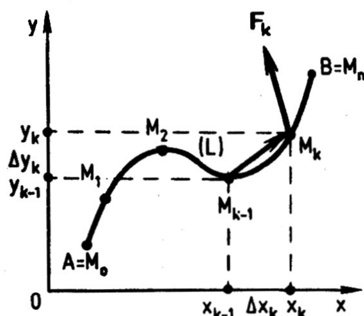
$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\,dt=$$
$$=\sqrt{9+36t^2+36t^4}\,dt=(6t^2+3)\,dt,$$

tai

$$m=\int\limits_{(L)}\varrho(x,y,z)ds=\int\limits_0^1 2(6t^2+3)dt=2(2t^3+3t)\Big|_0^1=10.$$

8.6.3. Antrojo tipo kreiviniai integralai. Sakykime, materialusis taškas M, veikiamas kintamos jėgos $\mathbf{F}(x,y)$, juda kreive (L) iš taško A į tašką B (154 pav.). Apskaičiuosime darbą W, kurį šiame kelyje atlieka jėga $\mathbf{F}$.

Tuo tikslu: 1) kreivę (L) taškais $A=M_0$, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, $M_n=B$ padalijame į n dalių; 2) apskaičiuojame jėgos $\mathbf{F}$ atliekamą darbą kelyje $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$, tarę, kad: a) materialusis



154 pav.

taškas juda ne lankeliu, o atkarpa $\overline{M_{k-1}M_k}$; b) šiame kelyje jėga **F** yra pastovi ir lygi jėgos reikšmei kokiame nors lankelio $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ taške, pavyzdžiui, taške $M_k(x_k, y_k)$, t. y. $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(M_k) = \mathbf{F}(x_k, y_k)$.

Kaip žinome iš fizikos, jėga $\mathbf{F}_k$ kelyje $M_{k-1}M_k$ atliks darbą, apytiksliai lygų

$$W_k \approx |\mathbf{F}_k| \cdot |\overline{M_{k-1}M_k}| \cos(\widehat{\mathbf{F}_k, \overline{M_{k-1}M_k}}). \qquad (1)$$

(1) lygybės dešiniojoje pusėje esantis reiškinys lygus vektorių F_k ir $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ skaliarinei sandaugai. Jeigu

$$\mathbf{F}_k = P(x_k, y_k)\mathbf{i} + Q(x_k, y_k)\mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x_k \mathbf{i} + \Delta y_k \mathbf{j},$$

tai

$$W_k \approx P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k. \qquad (2)$$

Susumavę šiuos darbus kiekvienoje kreivės (L) dalyje, gauname apytikslę darbo W reikšmę

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} (P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k). \qquad (3)$$

Ši reikšmė tuo mažiau skirsis nuo tikslios darbo reikšmės, kuo smulkiau bus suskaidyta kreivė (L). Perėję prie ribos, kai $\lambda = \max\{|\overline{M_{k-1}M_k}|\} \to 0$, gausime tikslią darbo reikšmę:

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k). \qquad (4)$$

Suma, esanti (3) lygybės dešiniojoje pusėje, vadinama *integraline suma,* o jos (4) riba — *antrojo tipo kreiviniu integralu kreive* (L) ir žymima

$$\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Vadinasi, jėgos **F** darbas, atliekamas perkeliant materialųjį tašką kreive (L) iš taško A į tašką B, išreiškiamas antrojo tipo kreiviniu integralu

$$W = \int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{5}$$

Kreivė (L) vadinama integravimo keliu, A — integravimo kelio pradžia, o B — jo pabaiga.

Aukštosios matematikos kurse įrodoma šitokia teorema.

Teorema. *Jeigu funkcijos* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *tolydžios kreivėje* (L), *o šios kreivės parametrinės lygtys yra*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ — *tolydžiosios funkcijos, tai teisinga formulė*

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)\big)\,dt.\end{aligned}} \tag{6}$$

Kai kreivės (L) lygtis yra

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

(6) lygybė virsta šitokia:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \\ &= \int_{a}^{b} \big(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)\big)\,dx.\end{aligned}} \tag{7}$$

Jeigu kreivės (L) lygtis yra

$$x = g(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

tai

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \\ &= \int_{c}^{d} \big(P(g(y), y) \cdot g'(y) + Q(g(y), y)\big)\,dy.\end{aligned}} \tag{8}$$

Iš (6) formulės išplaukia, kad antrojo tipo kreivinis integralas pasižymi visomis apibrėžtinio integralo savybėmis:

1) $\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=-\int\limits_{(BA)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy,$ (9)

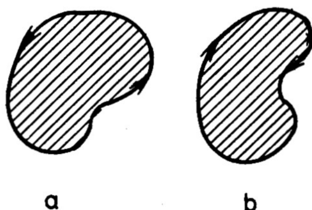
t. y. pakeitus integravimo kryptį, integralas keičia ženklą priešingu;

2) jeigu taškas C integravimo kreivę (AB) dalija į dvi dalis (AC) ir (CB), tai

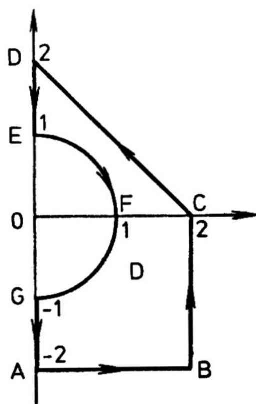
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=$$
$$=\int\limits_{(AC)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy+\int\limits_{(CB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy. \quad (10)$$

Jeigu integravimo kreivė yra uždara (jos pradžios taškas A sutampa su pabaigos tašku B), tai vieną kryptį laikysime teigiama, o kitą — neigiama. 155 paveiksle, *a*, pavaizduota teigiamoji integravimo kryptis, o 155 paveiksle, *b*,— neigiamoji. Integralą uždaruoju kontūru žymėsime šitaip: $\oint\limits_{(L)}$. Kai integravimo kryptis nenurodyta, integruosime teigiamąja kryptimi.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(L)} xydx+5y^2dy$, kai (L) — kreivės $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ lankas (kreivė yra elipsės, kurios pusašės $a=3$, $b=2$, dalis, esanti pirmajame ketvirtyje).



155 pav.



156 pav.

Pagal (6) formulę

$$\int\limits_{(L)} xydx+5y^2dy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos t\cdot 2\sin t\cdot 3(-\sin t)+5(2\sin t)^2\cdot 2\cos t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-18\cos t\sin^2 t+40\cos t\cdot\sin^2 t)\,dt=22\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=$$

$$=22\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,d(\sin t)=\frac{22}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{22}{3}.$$

2. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(AB)} x\sqrt[3]{y}dx-6x^3dy$, kai (AB) — kreivė $y=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Remdamiesi (7) formule, gauname

$$\int\limits_{(AB)} x\sqrt[3]{y}dx-6x^3dy=\int\limits_{-1}^{1}(x\sqrt[3]{x^3}-6x^3\cdot 3x^2)\,dx=\int\limits_{-1}^{1}(x^2-18x^5)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-3x^6\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

3. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(AB)} ydx+(x+y)dy$, kai (AB) — kreivė $x=2y^2$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

Pagal (8) formulę

$$\int\limits_{(AB)} ydx+(x+y)dy=\int\limits_0^2(y\cdot 4y+(2y^2+y))\,dy=\int\limits_0^2(6y^2+y)\,dy=$$

$$=\left(2y^3+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2=16+2=18.$$

4. Apskaičiuosime integralą, $\oint\limits_{(L)}(x-y)dx+xdy$, kai (L) — kontūras, ribojantis 156 paveiksle pavaizduotą sritį D.

Kadangi $(L)=(AB)\cup(BC)\cup(CD)\cup(DE)\cup(EFG)\cup(GA)$, tai apskaičiuosime integralą kiekvienoje kontūro dalyje ir gautuosius rezultatus sudėsime (žr. 2 savybę):

1) atkarpos AB lygtis yra $y=-2$, o x kinta nuo 0 iki 2, todėl

$$\int\limits_{(AB)}(x-y)dx+xdy=\int\limits_0^2((x+2)+x\cdot(-2)')\,dx=\int\limits_0^2(x+2)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^2=2+4=6;$$

2) atkarpos BC lygtis yra $x=2$, o y kinta nuo -2 iki 0. Vadinasi,

$$\int\limits_{(BC)}(x-y)\,dx+x\,dy=\int\limits_{-2}^{0}((2-y)\cdot 2'+2)\,dy=\int\limits_{-2}^{0}2dy=2y\Big|_{-2}^{0}=4;$$

3) atkarpos CD lygtis yra $y=-x+2$, o x kinta nuo 2 iki 0, todėl

$$\int\limits_{(CD)}(x-y)\,dx+x\,dy=\int\limits_{2}^{0}(x+x-2)+x\cdot(-x+2)')\,dx=\int\limits_{2}^{0}(x-2)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^0=-2+4=2;$$

4) atkarpos DE lygtis yra $x=0$, o y kinta nuo 2 iki 1, todėl

$$\int\limits_{(DE)}(x-y)\,dx+x\,dy=\int\limits_{2}^{1}((0-y)\cdot 0'+0)\,dy=0;$$

5) (EFG) — vienetinio apskritimo lankas, kurio parametrinės lygtys yra $x=\cos t$, $y=\sin t$, o t kinta nuo $\frac{\pi}{2}$ iki $-\frac{\pi}{2}$. Vadinasi,

$$\int\limits_{(EFG)}(x-y)\,dx+x\,dy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}((\cos t-\sin t)\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-\sin t\cdot\cos t+1)\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos t\,d(\cos t)+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}dt=$$

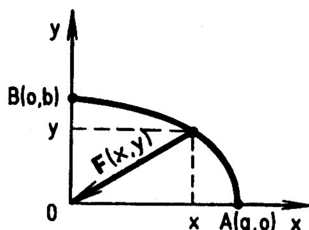
$$=\frac{\cos^2 t}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=-\pi;$$

6) atkarpos GA lygtis yra $x=0$, o y kinta nuo -1 iki -2. Todėl

$$\int\limits_{(GA)}(x-y)\,dx+x\,dy=\int\limits_{-1}^{-2}((0-y)\cdot 0'+0)\,dy=0.$$

Gautąsias integralų reikšmes sudėję, turime:

$$\oint\limits_{(L)}(x-y)\,dx+x\,dy=6+4+2+0-\pi+0=12-\pi.$$



157 pav.

5. Apskaičiuosime darbą, kurį atlieka materialusis taškas, judėdamas elipsės $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ lanku, esančiu pirmajame ketvirtyje. Taškas juda prieš laikrodžio rodyklę veikiamas jėgos, kuri kiekviename elipsės taške lygi to taško atstumui iki koordinačių pradžios ir nukreipta į koordinačių pradžią (157 pav.).

Aišku, kad $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}$. Todėl $W=\int\limits_{(AB)}-xdx-ydy$. Parametrinės elipsės lanko AB lygtys yra $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. Remdamiesi (6) formule, gauname

$$W=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t(-a\sin t)+b\sin t\cdot b\cos t)dt=-a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t d(\cos t)-$$

$$-b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t d(\sin t)=-\frac{a^2}{2}\cos^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{b^2}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

Jeigu kreivė (AB) yra erdvinė ir jėga $\mathbf{F}=P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$ apibrėžta toje kreivėje, tai darbas, kurį atlieka jėga $\mathbf{F}$, perkeldama materialųjį taškinį kūną iš taško A į tašką B, išreiškiamas integralu:

$$\boxed{W=\int\limits_{(AB)}P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz.} \qquad (11)$$

(10) integralas skaičiuojamas panašiai kaip ir (6) integralas.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\oint\limits_{(L)}xdx+ydy+zdz$, kai (L) — apskritimas

$$\begin{cases} y^2+z^2=4, \\ x=1. \end{cases}$$

Apskritimo parametrinės lygtys yra $y=2\cos t$, $z=2\sin t$, $x=1$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Vadinasi,

$$\oint_{(L)} xdx+ydy+zdz=\int_0^{2\pi}(1\cdot 1'+2\cos t\cdot 2(-\sin t)+2\sin t\cdot 2\cos t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(0+4(\sin t\cdot\cos t-\sin t\cdot\cos t))\,dt=0.$$

2. Apskaičiuosime integralą $\int_{(AB)}(x-2z)\,dx+(x+3y+z)\,dy+$ $+(5x+y)\,dz$, kai (AB) — atkarpa, jungianti taškus $A(-1,\ 2,\ 3)$ ir $B(5,\ -2,\ 1)$.

Remdamiesi 6.6 skyrelio (1) formule, gauname tiesės, einančios per taškus A ir B lygtį:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-2}.$$

Jos parametrinės lygtys yra $x=-1+6t$, $y=2-4t$, $z=3-2t$. Atkarpą AB gausime, kai t kis nuo 0 iki 1. Vadinasi,

$$\int_{(AB)}(x-2z)\,dx+(x+3y+z)\,dy+(5x+y)\,dz=$$

$$\int_0^1((-1+6t-2(3-2t))\cdot 6+(-1+6t+3(2-4t)+3-2t)\cdot(-4)+$$

$$+(5(-1+6t)+2-4t)\cdot(-2))\,dt=\int_0^1(-68+40t)\,dt=$$

$$=(-68t+20t^2)\Big|_0^1=-48.$$

8.7. Gryno* formulė

Šiame skyrelyje išvesime sąryšį tarp dvilypio integralo srityje D ir kreivinio integralo kreive (L), ribojančia šią sritį (158 pav.).

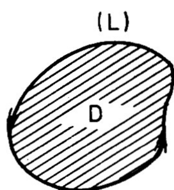
Sritį D vadinsime *iškiląja*, jeigu bet kuriuos du jos taškus jungianti atkarpa priklauso tai sričiai. 159 paveiksle, *a*, sritis D yra iškila, o 159 paveiksle, *b*, nėra iškila.

Teorema. *Jeigu funkcijos $P(x,\ y)$ ir $Q(x,\ y)$ yra tolydžios ir turi tolydžias pirmosios eilės dalines išvestines iškiloje srityje D, tai teisinga lygybė*

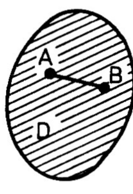
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{(L)}P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy. \qquad (1)$$

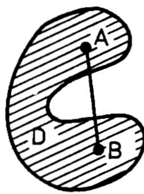
(1) lygybė vadinama *Gryno formule.*

* Green George (1793—1841) — anglų matematikas ir fizikas.



158 pav.





159 pav.

Įrodymas. Dvilypį integralą $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$ pakeiskime kartotiniu integralu (žr. 160 pav.):

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b P(x,\ y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x,\ f_2(x)) - P(x,\ f_1(x)))dx = \int\limits_a^b P(x,\ f_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\ f_1(x))dx =$$

$$= \int\limits_{(ADB)} P(x,\ y)dx - \int\limits_{(ACB)} P(x,\ y)dx = -\int\limits_{(BDA)} P(x,\ y)dx - \int\limits_{(ACB)} P(x,\ y)dx =$$

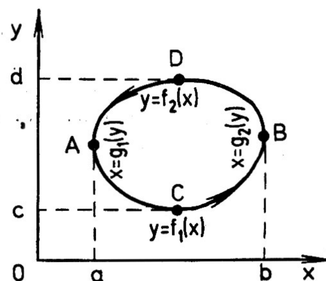
$$= -\oint\limits_{(L)} P(x,\ y)dx. \qquad (2)$$

Analogiškai įrodome, kad

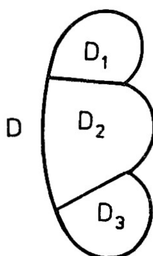
$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \oint\limits_{(L)} Q(x,\ y)dy. \qquad (3)$$

Sudėję (2) ir (3) lygybes, gauname (1) formulę.

Pastaba. Gryno formulė teisinga ir sritims, kurios yra neiškilos, tačiau jas galima papildomomis linijomis padalyti į keletą iškilųjų sričių (žr. 161 pav.).



160 pav.



161 pav.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\oint\limits_{(L)}(x-y)dx+(x+y)dy$, (L) — apskirtumas, kurio lygtis yra $x^2+y^2=9$.

Šiame pavyzdyje $P(x, y)=x-y$, $Q(x, y)=x+y$ ir $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-(-1)=2$. Vadinasi,

$$\oint\limits_{(L)}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{D}2dxdy=2\iint\limits_{D}dxdy=2S;$$

čia S — skritulio $x^2+y^2=9$ plotas. Jis lygus 9π. Todėl

$$\oint\limits_{(L)}(x-y)dx+(x+y)dy=18\pi.$$

8.8. Figūrų plotų skaičiavimas naudojantis kreiviniais integralais

Sakykime, sritis D apribota kontūru (L) (160 pav.). Srities D plotą galima rasti naudojantis dvilypiu integralu

$$S=\iint\limits_{D}dxdy.$$

Gryno formulėje P ir Q taip parinkę, kad būtų $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, gauname

$$S=\iint\limits_{D}dxdy=\oint\limits_{(L)}P(x, y)dx+Q(x, y)dy. \qquad (1)$$

Lygybė $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ teisinga, kai, pavyzdžiui, $Q=x$, $P=0$ arba $Q=0$, $P=-y$. Pirmuoju atveju iš (1) lygybės išplaukia, kad

$$S=\oint\limits_{(L)}xdy, \qquad (2)$$

antruoju atveju —

$$S=-\oint\limits_{(L)}ydx. \qquad (3)$$

Taigi figūros D plotą galima skaičiuoti remiantis arba (2), arba (3) formule. Tačiau praktikoje dažniau naudojamasi kita ploto skaičiavimo formule, gauta panariui sudėjus (2) ir (3) lygybes:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\oint\limits_{(L)}xdy-ydx.} \qquad (4)$$

Pavyzdys. Apskaičiuosime skritulio, apriboto apskritimu $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, plotą.

Pagal (4) formulę

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\cos t\cdot a\cos t-a\sin t\cdot(-a\sin t))dt=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}dt=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi=\pi a^2.$$

8.9. Kreivinio integralo nepriklausymas nuo integravimo kelio

Sakykime, funkcijos $P(x, y)$ ir $Q(x, y)$ apibrėžtos srityje D. Imkime bet kuriuos du šios srities taškus A ir B ir nagrinėkime integralus

$$\int_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy \qquad (1)$$

skirtingomis kreivėmis, jungiančiomis taškus A ir B (162 pav.).

Sakysime, kad *kreivinis integralas* (1) *nepriklauso nuo integravimo kelio, jungiančio taškus A ir B, jei*

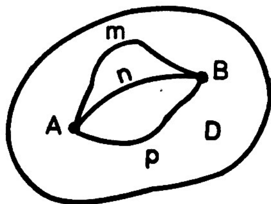
$$\int_{(AmB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\int_{(AnB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=$$

$$=\int_{(ApB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\ldots \qquad (2)$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime integralą $\int_{(AB)}(x^2+y^2)dx+2xydy$, kai (AB): a) tiesės $y=x$ atkarpa tarp taškų $A(0, 0)$ ir $B(1, 1)$; b) parabolės $y=x^2$ lankas, jungiantis taškus $A(0, 0)$ ir $B(1, 1)$; c) kubinės parabolės $y=x^3$ lankas tarp taškų $A(0, 0)$ ir $B(1, 1)$.

Visais atvejais remsimės 8.7. skyrelio (7) formule:

a) $\int_{(AB)}(x^2+y^2)dx+2xydy=\int_{0}^{1}((x^2+x^2)+2x\cdot x\cdot x')dx=\int_{0}^{1}4x^2dx=\frac{4}{3}$;



162 pav.

b) $\int\limits_{(AB)} (x^2+y^2)dx+2xydy=\int\limits_0^1 ((x^2+x^4)+2x\cdot x^2\cdot (x^2)')dx=\int\limits_0^1 (x^2+5x^4)dx=$

$=\left(\frac{x^3}{3}+x^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3};$

c) $\int\limits_0^1 (x^2+y^2)dx+2xydy=\int\limits_0^1 ((x^2+x^6)+2x\cdot x^3\cdot (x^3)')dx=\int\limits_0^1 (x^2+7x^6)dx=$

$=\left(\frac{x^3}{3}+x^7\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}.$

Šiame pavyzdyje nagrinėjamas integralas nepriklauso nuo kreivių, jungiančių taškus A ir B.

2. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(AB)} ydx-xdy$, (AB) — pirmajame pavyzdyje pateiktos kreivės, jungiančios taškus $A(0, 0)$ ir $B(1, 1)$.

Kaip ir 1 pavyzdyje, remsimės 8.7 skyrelio (7) formule:

a) $\int\limits_{(AB)} ydx-xdy=\int\limits_0^1 (x-x)dx=0;$

b) $\int\limits_{(AB)} ydx-xdy=\int\limits_0^1 (x^2-x\cdot (x^2)')dx=-\int\limits_0^1 x^2dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=-\frac{1}{3};$

c) $\int\limits_{(AB)} ydx-xdy=\int\limits_0^1 (x^3-x\cdot (x^3)')dx=\int\limits_0^1 (x^3-3x^3)dx=-2\int\limits_0^1 x^3dx=$

$=-2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}.$

Šiame pavyzdyje nagrinėjamas integralas priklauso nuo kreivės, jungiančios taškus A ir B.

Kaip nustatyti, ar integralas priklauso ar nepriklauso nuo integravimo kelio parinkimo?

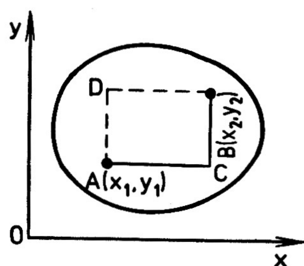
Atsakymas į šį klausimą išplaukia iš tokios teoremos.

Teorema. *Jeigu funkcijos $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ srityje D yra tolydžios, tai integralas nepriklauso nuo kreivių, jungiančių taškus A ir B, tada ir tik tada, kai*

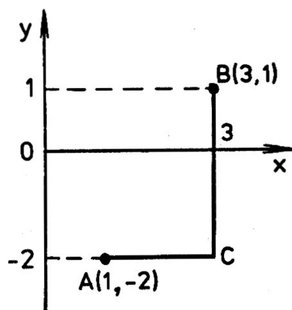
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall\ (x, y)\in D. \tag{3}$$

Šios teoremos neįrodinėsime.

Atkreipsime dėmesį, kad pirmajame pavyzdyje $P(x, y)=x^2+y^2$, $Q(x, y)=2xy$, todėl $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$ ir $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, o antrajame pavyzdyje $P(x, y)=y$, $Q(x, y)=-x$, todėl $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$ ir $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$.



163 pav.



164 pav.

Jeigu integralas $\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ nepriklauso nuo integravimo kelio, jungiančio taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$, tai jis žymimas šitaip:

$$\int\limits_{A}^{B} P(x, y)dx+Q(x, y)dy, \text{ arba } \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

Toks integralas apskaičiuojamas pasirinkus paprasčiausią integravimo kelią, pavyzdžiui, laužtę, kurios grandys lygiagrečios koordinačių ašims (163 pav.).

Uždavinys. Įrodykite: jeigu integralas $\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ nepriklauso nuo srities D kelio, jungiančio taškus A ir B, tai

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0;$$

čia (L) — uždara srities D kreivė.

Pavyzdžiai. 3. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_{(1, -2)}^{(3, 1)} (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

Įsitikinsime, kad šis integralas nepriklauso nuo integravimo kelio. Iš tikrųjų $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$, t. y. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Integravimo kelią pasirenkame, kaip parodyta 164 paveiksle. Atkarpos AC lygtis yra $y=-2$, o x kinta nuo 1 iki 3. Atkarpos CB lygtis yra $x=3$, o y kinta nuo -2 iki 1. Pastebėję, kad kelyje AC $dy=0$, o kelyje CB — $dx=0$, turime:

$$\int\limits_{(AB)} (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=\int\limits_{(AC)} (x^2+2xy-y^2)dx+$$

$$+(x^2-2xy-y^2)dy+\int\limits_{(CB)} (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=$$

$$=\int_1^3 (x^2+2x\cdot(-2)-4)dx+\int_{-2}^1 (9-2\cdot 3y-y^2)dy=\int_1^3 (x^2-4x-4)dx+$$

$$+\int_{-2}^1 (9-6y-y^2)dy=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2-4x\right)\Bigg|_1^3+\left(9y-3y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^1=17\frac{2}{3}.$$

4. Apskaičiuosime integralą $\oint\limits_{(L)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$, (L) — apskritimas $x^2+y^2=16$.

Kadangi $P(x, y)=x^4+4xy^3$, $Q(x, y)=6x^2y^2-5y^4$, tai $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=$ $=12xy^2$. Vadinasi, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, todėl integralas nepriklauso nuo integravimo kelio. Iš uždavinio išplaukia, kad

$$\oint\limits_{(L)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=0.$$

8.10. Pratimai

Pakeiskite integravimo tvarką:

1. $\int_1^2 dx\int_x^{x+3} f(x, y)dy.$ **2.** $\int_0^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx.$

3. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x, y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x, y)dy.$

4. $\int_0^1 dx\int_0^{x^3} f(x, y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x, y)dy.$

5. $\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x, y)dx+\int_1^3 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x, y)dy.$ **6.** $\int_1^3 dy\int_{-y}^{y} f(x, y)dx.$

7. $\int_3^5 dx\int_{-x}^{x^2} f(x, y)dy.$ **8.** $\int_1^3 dy\int_{-y}^{2y} f(x, y)dx.$

9. $\int_0^3 dx\int_{-3x}^{x^2} f(x, y)dy.$ **10.** $\int_{-\sqrt{2}}^1 dx\int_1^{3x^2+1} f(x, y)dy.$

Apskaičiuokite integralus:

11. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^1 xy^2 dx.$ **12.** $\int\limits_2^5 dy \int\limits_1^2 \frac{x}{y^2} dx.$

13. $\int\limits_{-2}^4 dy \int\limits_1^3 (x^2-2xy+3y^2-5)\,dx.$ **14.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^3 y\,dx.$

15. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_{-5}^0 (4x^3+3xy^2-5x+2y)\,dy.$

16. $\iint\limits_D e^{x-y} dx\,dy,\ D\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

17. $\iint\limits_D x \ln y\, dx\,dy,\ D\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant e.$

18. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy,\ D\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$

19. $\iint\limits_D \frac{x}{y} dx\,dy,\ D\colon\ y=x^2,\ y=\frac{1}{4}\ \left(y \geqslant \frac{1}{4}\right),\ y^2=x.$

20. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D\colon\ x=0,\ x=1,\ y=x.$

21. $\iint\limits_D x\,dx\,dy,\ D\colon\ y=x^3,\ x=0,\ x+y=2.$

22. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D\colon\ y=x,\ y=1,\ y=2,\ x=0.$

23. $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy,\ D\colon\ x=0,\ x=y^2,\ y=2.$

24. $\iint\limits_D (2xy+x^2)\,dx\,dy,\ D\colon\ y=0,\ y=x^2,\ x=1,\ x=2.$

25. $\iint\limits_D (9x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy,\ D\colon\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

Apskaičiuokite plotą figūrų, apribotų nurodytomis kreivėmis:

26. $y=x^2,\ x+y=2.$ **27.** $y^2=x,\ y^2=4x,\ y=1,\ y=3.$

28. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4.$ **29.** $x=5-y^2,\ x=-4y.$

30. $x=y^2+1,\ x=5.$ **31.** $y=3-x^2,\ y=-2x.$

32. $y=4x-x^2,\ y=3x^2.$ **33.** $xy=1,\ xy=4,\ x=2,\ x=5.$

34. $y=x^2,\ xy=1,\ x=4.$ **35.** $xy=4,\ x+y-5=0.$

36. $y=\cos x,\ y=\sin x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4}.$ **37.** $y=e^x,\ y=2e^{-x},\ x=-1.$

38. $y=\ln x,\ y=e^x,\ x=1,\ x=2.$ **39.** $x^2+y^2=2y,\ y=x,\ x=0.$

40. $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y \geqslant 0.$ **41.** $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y,\ x \geqslant 0.$

Dekarto koordinates pakeitę polinėmis, apskaičiuokite integralus:

42. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant 9$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

43. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $x^2+y^2\geqslant 1$, $x^2+y^2\leqslant 4$.

44. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant 4x$.

45. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\geqslant 1$, $x^2+y^2\leqslant 4$.

46. $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant 4$.

Raskite masę materialios plokštelės, apribotos kreivėmis:

47. $y^2=4x$ $(y\geqslant 0)$, $x=1$, $y=0$, jei $\varrho(x, y)=6x+3y^2$.
48. $xy=1$, $x=1$, $4y=x$, jei $\varrho(x, y)=x+y$.
49. $y=x^2$, $y=2x$, $x\leqslant 1$, jei $\varrho(x, y)=xy$.
50. $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, jei $\varrho(x, y)=x^2y$.

Raskite sunkio centro koordinates homogeninės plokštelės, apribotos kreivėmis:

51. $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$.
52. $y=x$, $y=10-x$, $y=1$, $y=3$.
53. $y=4-x^2$, $y+2x=4$.
54. $x=0$, $y=1$, $y=x$.
55. $y=x^2$, $x+y=2$.
56. $y=x^2$, $y=1$.

Apskaičiuokite inercijos momentus I_{Ox} ir I_{Oy} materialios plokštelės, apribotos kreivėmis:

57. $x+y=1$, $x+2y=2$, $y=0$, $\varrho(x, y)=1$.
58. $y=0$, $y=x$, $x+y=2$, $\varrho(x, y)=3$.
59. $y=0$, $y=x$, $y=2-x$, $\varrho(x, y)=xy$.
60. $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$, $\varrho(x, y)=x+y$.
61. $x^2+y^2=4$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $\varrho(x, y)=y$.
62. $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $\varrho(x, y)=x+y$.

Raskite tūrį kūno, apriboto šiais paviršiais:

63. $3x+4y+2z-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
64. $y+2z-4=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=5$.
65. $x+y+z=6$, $3x+2y=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
66. $x+y+z=6$, $x=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
67. $x+y+z=4$, $x+y=2$, $x=2$, $y=2$, $z=0$.
68. $z=\frac{1}{2}y^2$, $2x+3y-12=0$, $x=0$, $z=0$.
69. $x^2=4y$, $5y+9z-45=0$, $z=0$.
70. $z=4-y^2$, $x+2y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(y\geqslant 0)$.
71. $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.
72. $z=x^2+y^2$, $x=-3$, $x=3$, $y=-2$, $y=2$, $z=0$.

73. $z=x^2+y^2,\ x+y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$
74. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$
75. $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3},\ z=0,\ x\geqslant 0.$
76. $x^2+y^2=1,\ 2x+3y+z=4,\ z=0.$

Apskaičiuokite kartotinius integralus:

77. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (2x+y+z)\,dz.$ 78. $\int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^{1-x} dz.$

79. $\int_0^2 dy\int_{-1}^4 dz\int_0^{3y+z} y\,dx.$ 80. $\int_0^5 dx\int_{-2}^4 dy\int_1^2 6xy^2z^3\,dz.$

81. $\int_1^4 dz\int_{z-1}^{2z} dy\int_0^{y+2z} dx.$ 82. $\int_0^2 dx\int_0^x dy\int_0^{2-0,5x^2} 2xyz\,dz.$

Apskaičiuokite trilypius integralus:

83. $\iiint\limits_G xy\,dx\,dy\,dz,\ G:\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ -2\leqslant y\leqslant -1,\ 0\leqslant z\leqslant 0{,}5.$

84. $\iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz,\ G:\ x+z=2,\ y=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

85. $\iiint\limits_G xy\,dx\,dy\,dz,\ G:\ x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

86. $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz,\ G:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

87. $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,\ G:\ x^2+y^2=2x,\ z=0,\ z=3.$

88. $\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz,\ G:\ z^2=x^2+y^2,\ z=2.$

89. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,\ G:\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}.$

90. $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ G:\ x^2+y^2+z^2\geqslant 4,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 16.$

Apskaičiuokite tūrį kūno, apriboto šiais paviršiais:

91. $z=y^2,\ z=2y^2,\ y=x,\ y=2,\ x=0.$
92. $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$
93. $z=4-x^2-y^2,\ z=x^2+y^2,\ x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1.$
94. $x^2+y^2=4,\ x+y+z=6,\ x+y+z=9.$
95. $x^2+y^2=z-1,\ z=3.$
96. $z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$
97. $x^2+y^2+2z-16=0,\ z=2.$
98. $x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2=4x,\ z=0.$

Apskaičiuokite masę kūno, apriboto paviršiais:

99. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$, jei $\varrho(x, y, z)=x+y+z$.

100. $x+y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, jei $\varrho(x, y, z)=z$.

101. $x+y=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=4$, jei $\varrho(x, y, z)=2x+3y-z$.

102. $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, jei $\varrho(x, y, z)=x+y+z$.

103. $x^2=2y$, $y+z=1$, $z=0$, $\varrho(x, y, z)=y$.

104. $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$, $\varrho(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2}$

105. $x^2+y^2+z^2=3$, jei $\varrho(x, y, z)=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Raskite sunkio centro koordinates homogeninio kūno, apriboto paviršiais:

106. $z+x=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=2$.

107. $x+y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$.

108. $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

109. $z^2=x^2+y^2$, $z=2$.

110. $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$.

111. Raskite homogeninio kubo, kurio kraštinė lygi a, inercijos momentus koordinačių ašių ir centro atžvilgiu.

112. Apskaičiuokite kūno, apriboto paviršiais $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=h$, inercijos momentą I_{Oz}, kai $\varrho(x, y, z)=2$.

Raskite inercijos momentą I_{Oz} homogeninio kūno, apriboto paviršiais:

113. $y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$.

114. $z=x^2+y^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$.

115. $x^2+y^2+z^2=9$.

Apskaičiuokite pirmojo tipo kreivinius integralus:

116. $\int\limits_{(L)} \frac{ds}{x+y}$, (L) — tiesės $y=-\sqrt{3}x+2$ atkarpa tarp taškų $A(0, 2)$ ir $B(\sqrt{3}, -1)$.

117. $\int\limits_{(L)} (x+2\sqrt{y})ds$, (L) — parabolės $y=x^2$ lankas tarp taškų $A(0, 0)$ ir $B(2, 4)$.

118. $\int\limits_{(L)} (5y-\sqrt{x})ds$, (L) — parabolės $y^2=x$ lankas tarp taškų $A(1, 1)$ ir $B(9, 3)$.

119. $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)ds$, (L) — kreivės $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=\sqrt{5}t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, lankas.

120. $\int\limits_{(L)} (2x+3y+z)ds$, (L) — kreivės $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=t$, $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$, lankas.

Raskite kreivės lanko masę:

121. $x^2+y^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, jei $\varrho(x, y)=2x$.

122. $x^2+y^2=R^2$, $y\geqslant 0$, jei $\varrho(x, y)=3y^3$.

123. $y=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, jei $\varrho(x, y)=12x$.

124. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, $0\leqslant t\leqslant 1$, jei $\varrho(x, y, z)=2t$.

125. $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, jei $\varrho(x, y, z)=2z$.

126. Raskite kreivės $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, lanko ilgį.

127. Raskite kreivės $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$ lanko, esančio tarp taškų $A(0, 0, 0)$ ir $B(a, 0, a)$, ilgį.

128. Raskite astroidės $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ilgį.

Raskite materialiosios kreivės sunkio centro koordinates:

129. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, jei $\varrho(x, y, z)=2$.

130. $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$, jei $\varrho(x, y)=y^2$.

131. $x^2+y^2=R^2$, $y\geqslant 0$, jei $\varrho(x, y)=x^2$.

132. $y=-\sqrt{3}x+1$ atkarpos, esančios tarp koordinačių ašių, kai $\varrho(x, y)=y$.

133. $x+\sqrt{15}y=1$, esančios tarp koordinačių ašių, kai $\varrho(x, y)=x$.

Raskite inercijos momentus koordinačių ašių atžvilgiu šių homogeninių kreivių ($\varrho=1$):

134. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

135. $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

136. $x^2+y^2=R^2$.

137. $y=-\sqrt{3}x+1$, esančios tarp koordinačių ašių.

138. $x+\sqrt{15}y=1$, esančios tarp koordinačių ašių.

Apskaičiuokite antrojo tipo kreivinį integralą:

139. $\int\limits_{(L)} x^2y\,dx+x\,dy$, (L) — parabolės $y^2=x$ lankas tarp taškų $A(1, -1)$ ir $B(1, 1)$.

140. $\int\limits_{(AB)} y\,dx+x(y^3+1)\,dy$, (AB) — parabolės $y^2=2x$ lankas, esantis tarp taškų $A(0, 0)$ ir $B(2, 2)$.

141. $\int\limits_{(AB)} x^2y\,dx+x\,dy$, (AB) — kreivės $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ dalis, esanti tarp taškų $A(a, 0)$ ir $B(0, b)$.

142. $\int\limits_{(AB)} (x-y)\,dx+dy$, (AB) — apskritimo $x^2+y^2=R^2$ lankas, esantis tarp taškų $A(-R, 0)$ ir $B(R, 0)$ $(y\geqslant 0)$.

143. $\int\limits_{(ABC)} (x+y)\,dx$, (ABC) — laužtė, sudaryta iš atkarpų, jungiančių trikampio viršūnes $A(1, 0)$, $B(0, 0)$ ir $C(0, 1)$.

144. $\int\limits_{(ABC)} (x^2+y^2)\,dy$, (ABC) — laužtė, sudaryta iš atkarpų, jungiančių trikampio viršūnes $A(1, -1)$, $B(1, 1)$ ir $C(0, 1)$.

145. $\oint\limits_{(L)}(x+y)dx+(x-y)dy$, (L) — apskritimas $x^2+y^2=4$.

146. $\oint\limits_{(L)} ydx+3xdy$, (L) — apskritimas $x^2+y^2=9$.

147. $\int\limits_{(L)}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, (L) — kreivė $x=8\cos t$, $y=8\sin t$, $z=2$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Remdamiesi Gryno formule, apskaičiuokite šiuos integralus:

148. $\oint\limits_{(L)}(x+y)^2dx+(x^2+y^2)dy$, (L): a) kraštinės trikampio, kurio viršūnės $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 5)$; b) kraštinės trikampio, kurio viršūnės $O(0, 0)$, $D(1, 0)$, $E(0, 1)$.

149. $\oint\limits_{(L)}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, (L) — apskritimas $x^2+y^2=R^2$.

150. $\oint\limits_{(L)}(x+y)dx-(x-y)dy$, (L) — apskritimas $x^2+y^2=R^2$.

Remdamiesi antrojo tipo kreiviniu integralu, apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis:

151. $y^2=x$, $x^2=y$.
152. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.
153. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.
154. $x=4\cos t+5$, $y=4\sin t-1$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Apskaičiuokite šiuos integralus:

155. $\int\limits_{(-1, 2)}^{(2, 3)} xdy+ydx$.

156. $\int\limits_{(3, 1)}^{(1, 3)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$.

157. $\int\limits_{(2, 1)}^{(4, 3)} xdx-ydy$.

158. $\int\limits_{(0, 0)}^{(1, 1)} e^{x+y}(dx+dy)$.

159. $\int\limits_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2+5y^4)dy$.

160. $\int\limits_{(0, 0)}^{(1, 1)} 2xydx+x^2dy$.

161. Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga $\mathbf{F}=\sin(x+y)\mathbf{i}$, veikdama materialųjį taškinį kūną išilgai trikampio ABC, kurio viršūnės $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ir $C(0, 0)$, kraštinių AB ir BC.

162. Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}$, materialųjį taškinį kūną perkeldama parabolės $y^2=8x$ lanku iš taško $A(4, 4\sqrt{2})$ į tašką $B(2, 4)$.

163. Apskaičiuokite darbą, kurį atlieka jėga $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}$, materialųjį taškinį kūną perkeldama iš taško $A(0, 0)$ į tašką $B(1, 1)$: a) tiesės atkarpa; b) parabolės $y=x^2$ lanku.

164. Apskaičiuokite jėgos $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ atliekamą darbą materialųjį taškinį kūną apnešant apskritimu $x^2+y^2=R^2$.

165. Apskaičiuokite jėgos $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ atliekamą darbą materialųjį taškinį kūną perkeliant kreive $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ iš taško $A(a,\ 0,\ 2b\pi)$ į tašką $B(a,\ 0,\ 0)$.

8.11. Atsakymai

1. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^y f(x,\ y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^2 f(x,\ y)dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_{y-3}^2 f(x,\ y)dx$. **2.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,\ y)dy$. **3.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y} f(x,\ y)dx$. **4.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} f(x,\ y)dx$. **5.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,\ y)dy$.
6. $\int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_{-x}^3 f(x,\ y)dy+\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 f(x,\ y)dy$. **7.** $\int\limits_{-5}^{-3} dy\int\limits_{-y}^5 f(x,\ y)dx+\int\limits_{-3}^9 dy\int\limits_3^5 f(x,\ y)dx+\int\limits_9^{25} dy\int\limits_{\sqrt{y}}^5 f(x,\ y)dx$. **8.** $\int\limits_{-3}^{-1} dx\int\limits_{-x}^3 f(x,\ y)dy+\int\limits_{-1}^2 dx\int\limits_1^3 f(x,\ y)dy+\int\limits_2^6 dx\times$ $\times\int\limits_{\frac{x}{2}}^3 f(x,\ y)dy$. **9.** $\int\limits_{-9}^0 dy\int\limits_{-\frac{y}{3}}^3 f(x,\ y)dx+\int\limits_0^9 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^3 f(x,\ y)dx$. **10.** $\int\limits_1^4 dy\times$ $\times\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{\frac{y-1}{3}}} f(x,\ y)dx+\int\limits_1^4 dy\int\limits_{\sqrt{\frac{y-1}{3}}}^1 f(x,\ y)dx+\int\limits_4^7 dy\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{\frac{y-1}{3}}} f(x,\ y)dx$. **11.** $\frac{7}{6}$.
12. $\frac{9}{20}$. **13.** 88. **14.** 4,5. **15.** 1200. **16.** $\left(1-\frac{1}{e}\right)^2$. **17.** 8. **18.** 0.
19. $\frac{513}{2048}$. **20.** $\frac{1}{8}$. **21.** $\frac{7}{15}$. **22.** 5. **23.** $\frac{244}{21}$. **24.** 16,7. **25.** 2.
26. 4,5. **27.** 6,5. **28.** $\frac{32}{3}$. **29.** 36. **30.** $\frac{32}{3}$. **31.** $\frac{32}{3}$. **32.** $\frac{2}{3}$. **33.** $3\ln\frac{5}{2}$.
34. $21-2\ln 2$. **35.** $7{,}5-8\ln 2$. **36.** $\sqrt{2}-1$. **37.** $2e+e^{-1}-2\sqrt{2}$. **38.** e^2-e- $-2\ln 2+1$. **39.** $\frac{\pi}{4}+0{,}5$. **40.** $\frac{3\pi}{2}$. **41.** $\frac{3\pi}{2}$. **42.** $\frac{9\pi}{2}$. **43.** 2π. **44.** 24π.
45. $2\sqrt{3}\pi$. **46.** $\pi(1-e^{-4})$. **47.** 8. **48.** $\frac{19}{32}$. **49.** $\frac{5}{12}$. **50.** $\frac{2}{15}$. **51.** $\left(\frac{45}{28},\ \frac{279}{70}\right)$. **52.** $\left(5,\ \frac{17}{9}\right)$. **53.** $\left(1,\ \frac{12}{5}\right)$. **54.** $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$. **55.** $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{8}{5}\right)$. **56.** $\left(0,\ \frac{3}{5}\right)$. **57.** $I_{Ox}=\frac{1}{12}$, $I_{Oy}=\frac{7}{12}$. **58.** $I_{Ox}=0{,}5$, $I_{Oy}=3{,}5$.
59. $I_{Ox}=0{,}1$, $I_{Oy}=\frac{13}{30}$. **60.** $I_{Ox}=\frac{1787}{72}$, $I_{Oy}=\frac{137}{7}$. **61.** $I_{Ox}=\frac{64}{15}$, $I_{Oy}=\frac{32}{15}$.

62. $I_{Ox}=\frac{32}{5}$, $I_{Oy}=\frac{32}{5}$. **63.** 12. **64.** 20. **65.** 32. **66.** 31,5. **67.** $\frac{8}{3}$. **68.** 16. **69.** 144. **70.** $\frac{40}{3}$. **71.** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. **72.** 104. **73.** 13,5. **74.** $\frac{3\pi}{2}$. **75.** $\frac{\pi}{48}$. **76.** 4π. **77.** 21. **78.** 0. **79.** 55. **80.** 6750. **81.** 94,5. **82.** $\frac{4}{3}$. **83.** $-\frac{9}{8}$. **84.** 4. **85.** $\frac{1}{8}$. **86.** $\frac{1}{720}$. **87.** 16. **88.** 4π. **89.** $\frac{324}{5}\pi$. **90.** 24π. **91.** 4. **92.** $\frac{2}{3}$. **93.** $\frac{32}{3}$. **94.** 12π. **95.** 2π. **96.** $\frac{\pi}{6}$. **97.** 36π. **98.** 12π. **99.** $\frac{3a^4}{2}$. **100.** $\frac{27}{8}$. **101.** 54. **102.** 2. **103.** $\frac{8\sqrt{2}}{35}$. **104.** 16π. **105.** 162π. **106.** $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$. **107.** $\left(\frac{11}{24}, \frac{11}{24}, \frac{25}{24}\right)$. **108.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. **109.** (0, 0, 1,5). **110.** $\left(0, 0, \frac{3}{8}\right)$. **111.** $I_{Ox}=I_{Oy}=I_{Oz}=\frac{2a^5}{3}\varrho$, $I_0=a^5\varrho$. **112.** $\pi R^4 h$. **113.** $\frac{256}{3}\varrho$. **114.** $\frac{1792}{45}\varrho$. **115.** $\frac{648\pi}{5}\varrho$. **116.** $\frac{2}{1-\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **117.** $\frac{1}{4}(17\sqrt{17}-1)$. **118.** $\frac{1}{3}(37\sqrt{37}-5\sqrt{5})$. **119.** 24π. **120.** $\sqrt{10}\left(15+\frac{\pi^2}{8}\right)$. **121.** $2R^2$. **122.** $4R^4$. **123.** $5\sqrt{5}-1$. **124.** 6. **125.** $60\pi^2$. **126.** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. **127.** $a\sqrt{3}$. N u r o d y m a s. Tašką A gauname, kai $t=-\infty$, o tašką B, kai $t=0$. Taigi $L=\int\limits_{-\infty}^{0}\sqrt{(ae^t\cos t)'^2+(ae^t\sin t)'^2+(ae^t)'^2}\times$ $\times dt$. **128.** $6a$. N u r o d y m a s. Astroidės parametrines lygtis užrašykite šitaip: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Apskaičiuokite $\frac{1}{4}$ astroidės dalies $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ ilgį ir jį padauginkite iš 4. **129.** $(0, 0, b\pi)$. **130.** $\left(\frac{8}{3\pi}, 0\right)$. **131.** $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$. **132.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{2}{3}\right)$. **133.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{15}}{45}\right)$. **134.** $I_{Ox}=I_{Oy}=2\pi\left(\frac{a^2}{2}+\frac{4\pi^2b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$, $I_{Oz}=2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **135.** $I_{Ox}=I_{Oy}=2\pi$, $I_0=4\pi$. **136.** $I_{Ox}=I_{Oy}=\pi R^3$, $I_0=2\pi R^3$. **137.** $I_{Ox}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $I_{Oy}=\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **138.** $I_{Ox}=\frac{4\sqrt{15}}{675}$, $I_{Oy}=\frac{4\sqrt{15}}{45}$. **139.** $\frac{26}{21}$. **140.** $\frac{28}{3}$. **141.** $\frac{\pi ab}{4}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$. **142.** $-\frac{\pi R^2}{2}$. **143.** $-0,5$. **144.** $\frac{8}{3}$. **145.** 0. **146.** 18π. **147.** 0. **148.** a) $-\frac{56}{3}$; b) $-\frac{1}{3}$. **149.** 0. **150.** $-2\pi R^2$. **151.** $\frac{1}{3}$. **152.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **153.** πab. **154.** 16π. **155.** 8. **156.** $-\frac{8}{3}$. **157.** 2. **158.** e^2-1. **159.** 64. **160.** 1. **161.** $\frac{\pi}{2}-1$. **162.** 14. **163.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{17}{12}$. **164.** 0. **165.** πa^2.

9. SKAIČIŲ IR FUNKCIJŲ EILUTĖS

9.1. Skaičių eilutė ir jos suma

Nagrinėsime begalinę realiųjų skaičių seką

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Iš jos elementų sudarytą reiškinį

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ldots \qquad (1)$$

vadinsime *skaičių eilute,* o skaičius a_1, a_2, a_3, ... — tos *eilutės nariais,* a_n — *bendruoju eilutės nariu.*

Eilutei žymėti vartosime sumos ženklą $\sum$. Tada (1) eilutę užrašysime šitaip:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1')$$

Kadangi aritmetikoje sudėties veiksmas apibrėžiamas tik imant baigtinį dėmenų skaičių, tai (1) eilutės narių sudėti įprasta prasme negalima. Praplėsime sumos sąvoką. Nagrinėsime atvejį, kai dėmenų yra be galo daug.

Skaičius

$$S_1=a_1,$$
$$S_2=a_1+a_2,$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

vadinsime 1-ąja, 2-ąja, 3-ąja, ... ir n-ąja (1) *eilutės dalinėmis sumomis*, o seką

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \qquad (2)$$

— tos *eilutės dalinių sumų seka.*

Sakysime, kad (1) *eilutė konverguoja,* jeigu (2) seka turi baigtinę ribą $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Skaičių S vadinsime (1) *eilutės suma* ir rašysime

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S. \qquad (3)$$

Jeigu (2) seka ribos neturi arba $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\infty)$, tai sakysime, kad (1) *eilutė diverguoja.* Diverguojančioji eilutė sumos neturi.

Eilutę

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k, \tag{4}$$

gautą iš (1) eilutės, atmetus n pirmųjų jos narių, vadinsime *n-ąja* (1) *eilutės liekana*. Liekanos sumą žymėsime

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=R_n. \tag{5}$$

Pavyzdžiai. 1. Ištirsime, ar eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

konverguoja.

Kadangi eilutės n-oji dalinė suma lygi

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

tai

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Taigi tiriamoji eilutė konverguoja ir jos suma lygi 1.

2. Ištirsime, ar eilutė

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

konverguoja.

Kadangi

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)\cdot n}{2},$$

tai

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cdot n}{2}=+\infty.$$

Eilutė diverguoja.

3. Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}=1+\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}+\cdots$$

Aišku, kad

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ \text{ir}\ 1>\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

todėl

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sqrt[3]{n^2}.$$

Iš čia

$$\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty.$$

Taigi eilutė diverguoja.

4. Eilutė $1+(-1)+1+(-1)+\dots-(-1)^{n+1}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ diverguoja, nes jos dalinių sumų seka

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots$$

neturi ribos.

5. Ištirsime, ar eilutė

$$q+q^2+q^3+\dots+q^n+\dots,\quad q\in R,$$

kurios nariai sudaro geometrinę progresiją, konverguoja.

Pagal geometrinės progresijos n narių sumos formulę eilutės n-oji dalinė suma lygi

$$S_n=q+q^2+q^3+\dots+q^n=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}.$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=0$, kai $|q|<1$, tai $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{1-q}$. Šiuo atveju eilutė konverguoja.

Kai $|q|>1$, $\lim_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$, ir eilutė diverguoja.

Kai $q=1$, n-oji dalinė suma $S_n=n\to\infty$, kai $n\to\infty$.

Kai $q=-1$, dalinių sumų seka $-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \dots$ ribos neturi.

Tiriamoji eilutė konverguoja, kai $|q|<1$, ir diverguoja, kai $|q|\geqslant 1$.

Kyla klausimas: kaip atskirti konverguojančiąją eilutę nuo diverguojančiosios, neskaičiuojant dalinių sumų sekos ribos. Įrodysime būtinąjį eilutės konvergavimo požymį.

1 teorema. *Jeigu* (1) *eilutė konverguoja, tai bendrasis narys* a_n *artėja prie nulio, kai* $n\to\infty$, *t. y.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=0.} \tag{6}$$

Įrodymas. Sakykime, kad (1) eilutės suma lygi S, t. y. $\lim_{n\to\infty} S_n=S$. Kadangi $a_n=S_n-S_{n-1}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

16. Užsak. Nr. 284.

Išvada. *Jeigu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *tai* (1) *eilutė diverguoja.*

Iš tikrųjų, jeigu (1) eilutė konverguotų, tai pagal 1 teoremą jos n-ojo nario riba būtų lygi nuliui.

6 pavyzdys. Ištirsime, ar eilutė

$$0{,}6+0{,}61+0{,}601+0{,}6001+\cdots$$

konverguoja.

Kadangi $a_n=0{,}6+(0{,}1)^n$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0{,}6\neq 0$, tai eilutė diverguoja.

Atkreipsime dėmesį: kad (1) eilutės bendrojo nario riba būtų lygi nuliui, yra būtina, bet ne pakankama eilutės konvergavimo sąlyga.

7 pavyzdys. Įrodysime, kad eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{7}$$

kuri vadinama *harmonine eilute,* diverguoja, nors ir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n= =\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Sakykime priešingai, harmoninė eilutė konverguoja, t. y. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=S$. Tada ir $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$. Kita vertus,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Gautojoje nelygybėje perėję prie ribos, turime

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty} S_{2n}-\lim_{n\to\infty} S_n=S-S\geqslant\frac{1}{2}.$$

Tačiau ši nelygybė yra negalima. Vadinasi, harmoninė eilutė diverguoja.

9.2. Konverguojančiųjų eilučių savybės

1 teorema. *Jeigu eilutė* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja ir jos suma lygi S, tai su bet kuriuo* $\lambda\in R$, $\lambda\neq 0$, *eilutė* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ *konverguoja ir jos suma lygi* λS. *Jeigu eilutė* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja, tai diverguoja ir eilutė* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$.

Į r o d y m a s. Nagrinėjamų eilučių dalines sumas pažymėkime atitinkamai $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ ir $S'_n=\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k)$. Tuomet $S'_n=\lambda\sum_{k=1}^{n} a_k=\lambda S_n$ ir $\lim_{n\to\infty} S'_n=\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n)=\lambda\lim_{n\to\infty} S_n=\lambda S$.

Sakykime, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ konverguoja, t. y. $\lim_{n\to\infty} S'_n=S'$. Tuomet

$$S'=\lim_{n\to\infty} S'_n=\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n)=\lambda\lim_{n\to\infty} S_n,\ \text{t. y.}\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{S'}{\lambda}.$$

Gavome prieštaravimą, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja. Vadinasi, prielaida, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ konverguoja, yra neteisinga.

2 teorema. *Jeigu eilutės*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{ir} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konverguoja ir jų sumos atitinkamai lygios A ir B, tai konverguoja ir eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n),$$

o jos suma lygi $\alpha A+\beta B$.

Į r o d y m a s. Sakykime, $A_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, $B_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$ ir $C_n=(\alpha a_1+\beta b_1)+(\alpha a_2+\beta b_2)+(\alpha a_3+\beta b_3)+\cdots+(\alpha a_n+\beta b_n)$. Tuomet $C_n=\alpha(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+\beta(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)=\alpha A_n+\beta B_n$ ir

$$\lim_{n\to\infty} C_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n+\beta B_n)=\alpha\lim_{n\to\infty} A_n+\beta\lim_{n\to\infty} B_n=\alpha A+\beta B.$$

3 teorema. *Jeigu konverguoja eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *tai konverguoja ir jos liekana; atvirkščiai, jeigu konverguoja eilutės liekana, tai konverguoja ir pati eilutė.*

Į r o d y m a s. Eilutės liekanos $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ N-ąją dalinę sumą pažymėkime σ_N. Tuomet $S_{n+N}=S_n+\sigma_N$ ir $\sigma_N=S_{n+N}-S_n$. Vadinasi, $\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty} S_{n+N}-\lim_{N\to\infty} S_n=S-S_n$, t. y. $R_n=S-S_n$. Eilutės n-oji liekana konverguoja.

Atvirkščiai, jeigu eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ n-oji liekana $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ konverguoja ir jos suma lygi R_n, tai

$$\lim_{N\to\infty} S_{n+N}=\lim_{N\to\infty}(S_n+\sigma_N)=S_n+\lim_{N\to\infty}\sigma_N=S_n+R_n=S.$$

Taigi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja.

Išvada. *Jeigu eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, tai jos liekanos suma R_n artėja prie nulio, kai $n\to\infty$.*

Į r o d y m a s. Kadangi $R_n=S-S_n$, tai

$$\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=S-S=0.$$

Nagrinėjant eilutes, tenka spręsti du uždavinius: 1) reikia nustatyti, ar tiriamoji eilutė konverguoja; 2) jeigu eilutė konverguoja, tai reikia rasti jos sumą. Antrasis uždavinys dažnai yra sunkiai išsprendžiamas. Tačiau praktikoje ne visada būtina žinoti tikslią eilutės sumą, dažnai užtenka rasti jos apytikslę reikšmę.

S_n yra apytikslė eilutės sumos reikšmė, kai joje dėmenų skaičius pakankamai didelis, o jos liekana R_n — paklaida, kurią darome eilutės sumą S keisdami S_n.

Pavyzdžiai. 1. Ištirsime, ar eilutė

$$3^3+3^2+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\cdots$$

konverguoja.

Šią eilutę galime gauti iš eilutės

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}},$$

padauginę ją iš $\lambda=3^3$. Kadangi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ (geometrinė progresija, kurios $q=\frac{1}{3}<1$) konverguoja, tai pagal 1 teoremą konverguoja ir tiriamoji eilutė.

2. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(4\cdot 3^{-n}+5\cdot 2^{1-n})$ konverguoja. Jeigu eilutė konverguoja, tai rasime jos sumą.

Šios eilutės bendrasis narys yra $a_n=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Eilutės

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konverguoja (geometrinės progresijos, kurių vardikliai mažesni už 1) ir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Pagal 2 teoremą nagrinėjamoji eilutė konverguoja ir jos suma lygi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot 2=12.$$

3. Įvertinsime paklaidą, kai eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$ suma S pakeičiama daline suma S_{10}.

Šiuo atveju paklaida

$$R_{10}=\frac{1}{2^{11}+11}+\frac{1}{2^{12}+12}+\dots<\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\dots=$$

$$=\frac{\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}=0{,}001.$$

4. Ištirsime, kiek reikia imti eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ narių, skaičiuojant apytikslę jos sumą, kad paklaida R_n būtų mažesnė už 0,01.

9.1 skyrelio 1 pavyzdyje įrodėme, kad ši eilutė konverguoja, $S_n=1-\frac{1}{n+1}$ ir $S=1$. Vadinasi, $R_n=\frac{1}{n+1}$. Ieškosime tokio n, kad būtų $R_n<0{,}01$, t. y. $\frac{1}{n+1}<0{,}01$. Išsprendę šią nelygybę, gauname $n>99$. Vadinasi, S_{100} nuo S skirsis mažiau kaip 0,01.

9.3. Teigiamųjų eilučių konvergavimas

Ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguoja, ar diverguoja, nesunku nustatyti, kai eilutės nariai yra neneigiami, t. y. kai $a_n\geqslant 0$. Tokias eilutes vadinsime *teigiamosiomis eilutėmis*. Pažymėsime, kad teigiamųjų

eilučių dalinių sumų sekos yra monotoniškai nemažėjančios. Iš tikrųjų, $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geqslant S_n$, $n\in N$.

Remdamiesi teorema apie aprėžtos monotoniškai didėjančios sekos ribą, gauname pagrindinę teoremą apie teigiamosios eilutės konvergavimą.

1 teorema. *Teigiamoji eilutė konverguoja tada ir tik tada, kai jos dalinių sumų seka yra aprėžta.*

2 teorema (pirmasis palyginimo požymis). *Jeigu su visais* $n\in N$ *galioja nelygybės*

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n, \qquad (1)$$

tai, kai konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguoja ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(kai konverguoja „didesnioji" eilutė, konverguoja ir „mažesnioji" eilutė). Jeigu eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja, tai diverguoja ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(kai diverguoja „mažesnioji eilutė", diverguoja ir „didesnioji" eilutė).*

Įrodymas. Sakykime, kad $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$. Akivaizdu, kad $A_n\leqslant B_n$. Kadangi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja, tai jos dalinių sumų seka yra aprėžta, t. y. egzistuoja toks skaičius M, kad $B_n\leqslant M$ su visais $n\in N$. Bet $A_n\leqslant B_n\leqslant M$. Todėl konverguoja ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeigu eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja, tai diverguoja ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Iš tikrųjų, jeigu eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguotų, tai, kaip įrodyta, turėtų konverguoti ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pavyzdžiai. 1. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguoja, nes $\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguoja (harmoninė eilutė). pvz.: $\frac{1}{\sqrt{9}} \geqslant \frac{1}{9}$

2. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}$ konverguoja. Iš tikrųjų $\frac{1}{5^n+n}<\frac{1}{5^n}$, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ konverguoja (geometrinė progresija, kurios $q=\frac{1}{5}<1$).

Remiantis 2 teorema, galima įrodyti 3 labai svarbias teoremas apie teigiamųjų eilučių konvergavimą. Jas suformuluosime be įrodymo.

3 teorema (antrasis palyginimo požymis). *Jeigu egzistuoja baigtinė ir nelygi nuliui riba*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda,} \tag{2}$$

tai eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *ir* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *arba abi konverguoja, arba abi diverguoja.*

Pavyzdžiai. 3. Ištirsime, ar eilutė

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

konverguoja.

Lyginsime ją su 9.1 skyrelio **1** pavyzdyje ištirta konverguojančiąja eilute $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Kadangi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n(n+1)}\right)=$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, tai tiriamoji eilutė konverguoja.

4. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ diverguoja, nes lygindami ją su diverguojančiąja eilute $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (**1** pavyzdys), gauname:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4 teorema (Dalambero * požymis). *Sakykime, kad egzistuoja riba*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d.} \tag{3}$$

Jeigu $d<1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konverguoja; priešingu atveju, kai* $d>1$, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *diverguoja. Kai* $d=1$, *negalime nustatyti, ar eilutė konverguoja, ar diverguoja.*

---

* D'Alembert Jean Le Rond (1717—1783) — prancūzų matematikas ir filosofas.

Pavyzdžiai. 5. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ konverguoja. Kadangi

$$a_n=\frac{n}{5^n},\ a_{n+1}=\frac{n+1}{5^{n+1}},\ \text{tai}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5\cdot n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=\frac{1}{5}<1.$$

Eilutė konverguoja.

6. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ diverguoja, nes $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{n+1}:\frac{3^n}{n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot 3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=3>1.$$

7. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ $(n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n)$ konverguoja, nes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1.$$

8. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, s — teigiamas realusis skaičius, konverguoja.

Kadangi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^s}{n^s}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1}=1$, tai eilutės konvergavimui tirti Dalambero požymis netinka. Remsimės 2 teorema. Jeigu $0<s\leqslant 1$, tai $\frac{1}{n^s}\geqslant\frac{1}{n}$. Vadinasi, šiuo atveju eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ diverguoja, nes eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguoja.

Kai $s\geqslant 2$, $\frac{1}{n^s}\leqslant\frac{1}{n^2}$, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguoja (3 pavyzdys), tai konverguoja ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Yra įrodoma, kad tiriamoji eilutė konverguoja ir kai $1<s<2$. Taigi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ konverguoja, kai $s>1$, ir diverguoja, kai $0<s\leqslant 1$.

5 teorema (Koši požymis). *Sakykime, kad egzistuoja riba*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c.} \tag{4}$$

Jeigu $c<1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konverguoja; priešingu atveju, kai* $c>1$, *eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *diverguoja. Kai* $c=1$, *Koši požymis nepritaikomas.*

Pavyzdžiai. 9. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ konverguoja.

Čia $a_n=\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$. Todėl $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}<1$, ir eilutė konverguoja.

10. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$ diverguoja, nes $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3>1.$

11. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konverguoja.

Kadangi $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, tai Koši požymis nepritaikomas. Tačiau $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq0$. Eilutė diverguoja, nes nepatenkinama būtinoji konvergavimo sąlyga.

9.4. Absoliučiai ir reliatyviai konverguojančios eilutės

Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{n}a_n$, turinčią be galo daug teigiamų ir be galo daug neigiamų narių. Šios eilutės konvergavimui tirti dažnai taikoma šitokia teorema.

1 teorema. *Jeigu konverguoja eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *sudaryta iš duotosios eilutės narių absoliučiųjų didumų, tai konverguoja ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Įrodymas. Sakykime, $p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$. Kadangi $-|a_n|\leqslant a_n\leqslant|a_n|$, tai $0\leqslant p_n\leqslant|a_n|$, $0\leqslant q_n\leqslant|a_n|$ ir $a_n=p_n-q_n$. Iš čia

išplaukia, kad eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ konverguoja (pirmasis palyginimo požymis). Vadinasi, konverguoja ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$ (9.2 skyrelio 2 teorema, kai $\alpha=1$, $\beta=-1$).

Jeigu konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tai sakysime, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja absoliučiai.*

Jeigu konverguojant eilutei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguoja, tai sakysime, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja reliatyviai.*

Absoliučiajam konvergavimui tirti taikomi Dalambero arba Koši požymiai.

2 teorema. *Jeigu egzistuoja riba*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = d \qquad (1)$$

ir $d<1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja absoliučiai (kodėl?). Kai* $d>1$, *eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja.*

3 teorema. *Jeigu egzistuoja riba*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c \qquad (2)$$

ir $c<1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja absoliučiai (kodėl?). Kai* $c>1$, *eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja.*

Eilutes, kuriose po teigiamojo nario eina neigiamasis, po pastarojo — vėl teigiamasis ir t. t., vadinsime *alternuojančiosiomis eilutėmis.* Alternuojančiąją eilutę paprastai užrašome šitaip:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \; (a_n>0,\ n\in N). \quad (3)$$

4 teorema (Leibnico požymis). *Jeigu teigiamųjų skaičių seka* $\{a_n\}$ *monotoniškai mažėja, t. y.*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

tai alternuojančioji eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konverguoja.*

Įrodymas. Nagrinėsime šios eilutės dalines sumas, sudarytas iš lyginio skaičiaus narių:

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-3}-a_{2n-2})+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Kadangi

$$a_{2n-1}-a_{2n}>0,$$

tai seka $\{S_{2n}\}$, $n\in N$, yra monotoniškai didėjanti. Kita vertus, seka $\{S_{2n}\}$, yra aprėžta iš viršaus, nes

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}<a_1.$$

Vadinasi, monotoniškai didėjanti ir aprėžta iš viršaus seka $\{S_{2n}\}$ turi ribą, kurią žymėsime raide S:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S.$$

Aišku, kad

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1},$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}+\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=S.$$

Ir lyginio, ir nelyginio narių skaičiaus dalinių sumų sekos turi tą pačią ribą, kai $n\to\infty$. Taigi ir

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

Kadangi $S_{2n}>0$, tai $S\geqslant 0$. Be to,

$$0\leqslant S<a_1. \tag{4}$$

Įvertinsime alternuojančiosios eilutės liekanos sumą. Sakykime,

$$R_n=\pm(a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-\cdots)$$

(pliuso ar minuso ženklas priklauso nuo to, ar n lyginis, ar nelyginis).

Eilutė

$$a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-\cdots$$

yra alternuojanti, todėl, remdamiesi (4) nelygybėmis, gauname

$$0\leqslant |R_n|<a_{n+1}. \tag{5}$$

Kadangi $R_n=S-S_n$, tai teisinga šitokia teorema.

5 **teorema.** *Paklaida, kuri daroma alternuojančiosios eilutės sumą keičiant jos n-ąja daline suma, yra mažesnė už pirmojo atmetamo eilutės nario absoliutųjį didumą.*

Pavyzdžiai. 1. Ištirsime, ar eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ konverguoja.

Eilutė, sudaryta iš duotosios eilutės narių absoliučiųjų didumų $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ konverguoja (9.1 skyrelio **1** pavyzdys), todėl tiriamoji eilutė konverguoja absoliučiai.

2. Ar eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{10!}+\cdots$$

konverguoja, aiškinsimės remdamiesi Dalambero požymiu.

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(3n+1)!}\right|:\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3n-2)!\cdot(3n-1)\cdot 3n\cdot(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n\cdot(3n+1)}=0<1,$$

tai nagrinėjamoji eilutė konverguoja absoliučiai.

3. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguoja, nes $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$ ir $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (Leibnico požymis). Tačiau eilutė, sudaryta iš šios eilutės narių absoliučiųjų didumų, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguoja. Taigi duotoji eilutė konverguoja reliatyviai.

4. Apskaičiuosime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ sumą 0,1 tikslumu.

Ši eilutė konverguoja (Leibnico požymis), todėl reikia apskaičiuoti jos dalinę sumą S_n, kai $|R_n|<0{,}1$, t. y.

$$|R_n|<a_{n+1}=\frac{1}{2(n+1)-1}=\frac{1}{2n+1}<0{,}1.$$

Iš čia

$$2n+1>10,\ \text{arba}\ n>\frac{9}{2},\ \text{t. y.}\ n\geqslant 5.$$

Turime

$$S_5=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=0{,}83.$$

Taigi $S_5=0{,}8$ ir paklaida mažesnė už **0,1**.

5. Apskaičiuosime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\cdot n!}$ sumą 0,01 tikslumu.

Kadangi $|R_n| < \frac{1}{2(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{1}{(2n+2)\cdot(n+1)!}$, tai ieškosime tokio mažiausio natūraliojo skaičiaus n, tenkinančio nelygybę

$$\frac{1}{(2n+2)\cdot(n+1)!} < \frac{1}{100},$$

arba

$$(2n+2)\cdot(n+1)! > 100.$$

Nesunku įsitikinti:

kai $n=2$, $(2\cdot 2+2)\cdot(2+1)!=6\cdot 3!=36<100$,
kai $n=3$, $(2\cdot 3+2)\cdot(3+1)!=8\cdot 4!=192>100$.

Taigi $n=3$ ir užtenka apskaičiuoti trijų narių dalinę sumą S_3:

$$S_3 = \frac{1}{2\cdot 1!} - \frac{1}{4\cdot 2!} + \frac{1}{6\cdot 3!} = 0{,}40.$$

9.5. Laipsninės eilutės

Eilutę

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\dots+u_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad (1)$$

kurios nariai $u_n(x)$, $n \in N$, yra funkcijos, vadinsime *funkcijų eilute.*

Suteikę kintamajam x konkrečią reikšmę x_0, gauname skaičių eilutę

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\dots+u_n(x_0)+\dots \qquad (2)$$

Jeigu ši eilutė konverguoja, tai sakome, kad (1) *funkcijų eilutė konverguoja,* kai $x=x_0$, arba taške x_0. Jeigu (2) eilutė diverguoja, tai sakome, kad (1) *eilutė diverguoja taške* x_0.

Tos x reikšmės, su kuriomis duotoji funkcijų eilutė konverguoja, sudaro *funkcijų eilutės konvergavimo sritį.*

Iš funkcijų eilučių paprasčiausios yra laipsninės eilutės.

Eilutę

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad (3)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — realieji skaičiai, $x \in R$ — kintamasis dydis, vadinsime *laipsnine eilute.*

Laipsninėmis eilutėmis vadinsime ir bendresnio pavidalo eilutes

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n; \qquad (4)$$

čia x_0 — duotasis skaičius. Tačiau įvedus kintamąjį $x-x_0=t$, (4) eilutė tampa (3) eilute. Todėl pakanka nagrinėti tik (1) eilutę. Nesunku įsitikinti, kad (3) eilutė konverguoja, kai $x=0$, ir jos suma lygi a_0.

(3) eilutės konvergavimo srities ieškosime tirdami eilutės

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+\cdots+|a_n||x|^n+\cdots \qquad (5)$$

konvergavimą. Remsimės Dalambero požymiu:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Pažymėję

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R},$$

arba

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,} \qquad (6)$$

gauname

$$d=\frac{|x|}{R}.$$

Vadinasi, (5) eilutė konverguoja, kai $\frac{|x|}{R}<1$, t. y. kai $|x|<R$, arba $-R<x<R$, ir diverguoja, kai $\frac{|x|}{R}>1$.

Pagal 9.4 skyrelio 1 teoremą intervale $(-R, R)$ konverguoja absoliučiai ir (3) eilutė.

Jeigu (5) eilutė diverguoja, tai galima įrodyti, kad

$$\lim_{n\to\infty}|a_n||x|^n\neq 0.$$

Iš čia išplaukia, kad ir

$$\lim_{n\to\infty}a_nx^n\neq 0,$$

t. y. diverguoja ir (3) eilutė.

Skaičius R vadinamas (3) eilutės *konvergavimo spinduliu*, o intervalas $(-R, R)$ — *konvergavimo intervalu*. Spindulys R randamas pagal (6) formulę. Kai $R=\infty$, (3) eilutė konverguoja absoliučiai visoje realiųjų skaičių tiesėje, o kai $R=0$ — tik taške $x=0$. Ar (3) eilutė konverguoja intervalo galuose, t. y. kai $x=-R$ ir $x=R$, reikia tirti papildomai.

1 pavyzdys. Rasime šių eilučių konvergavimo intervalus:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 5^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 4^n}$.

S p r e n d i m a s. a) Remsimės (6) formule:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 5^n}:\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^{n+1}}{n\cdot 5^n}=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=5.$$

Vadinasi, eilutė konverguoja absoliučiai intervale $(-5, 5)$. Ištirsime, ar ji konverguoja intervalo galuose.

Kai $x=-5$, gauname eilutę $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, kuri konverguoja reliatyviai.

Kai $x=5$, gauname eilutę $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, kuri diverguoja.

Taigi eilutė konverguoja intervale $[-5, 5)$;

b) Kadangi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{2^n}:\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=2,$$

tai eilutė konverguoja absoliučiai intervale $(-2, 2)$.

Kai $x=2$, gauname eilutę $\sum_{n=0}^{\infty}n^2$, kuri diverguoja. Kai $x=-2$, eilutė $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$ taip pat diverguoja.

c) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$. Eilutė konverguoja absoliučiai intervale $(-1, 1)$. Remdamiesi 9.3 skyrelio **3** pavyzdžiu, įsitikiname, kad eilutė konverguoja abiejuose intervalo galuose, t. y. konverguoja intervale $[-1, 1]$;

d) $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Eilutė konverguoja tik taške $x=0$;

e) Kadangi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}:\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)=\infty,$$

tai eilutė konverguoja absoliučiai visoje realiųjų skaičių tiesėje;

f) Kadangi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 4^n}:\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}}{n\cdot 4^n}=4,$$

tai eilutė konverguoja su visais x, tenkinančiais nelygybę $|x-3|<4$, arba $-4<x-3<4$. Iš čia $-1<x<7$. Taigi eilutė konverguoja

absoliučiai intervale $(-1, 7)$. Nesunku įsitikinti, kad ji kairiajame šio intervalo gale konverguoja, o dešiniajame — diverguoja.

Suformuluosime (be įrodymo) pagrindines laipsninių eilučių savybes.

1 savybė. *Eilutės* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suma jos konvergavimo intervale yra tolydžioji kiek norima kartų diferencijuojama funkcija.*

2 savybė. *Jeigu eilutės* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suma lygi* $S(x)$, *tai eilutė, sudaryta iš duotosios eilutės išvestinių:*

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

turi tą patį konvergavimo spindulį ir jos suma lygi $S'(x)$:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Šiuo atveju sakome, kad *laipsninę eilutę jos konvergavimo intervale galima panariui diferencijuoti.* Laipsninės eilutės išvestinė yra taip pat laipsninė eilutė, kurią vėl galima diferencijuoti. Vadinasi, *laipsninę eilutę jos konvergavimo intervale galima kiek norima kartų diferencijuoti.*

3 savybė. *Jeigu laipsninės eilutės suma konvergavimo intervale* $(-R, R)$ *yra* $S(x)$, *t. y.*

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

tai bet kuriame intervale $[a, b] \subset (-R, R)$ *teisinga lygybė*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b a_0\,dx + \int_a^b a_1 x\,dx + \int_a^b a_2 x^2\,dx + \cdots + \int_a^b a_n x^n\,dx + \cdots$$

Ši savybė vadinama *laipsninės eilutės integravimu panariui.* Pasirinkę integravimo intervalą $[0, x] \subset (-R, R)$, gauname:

$$\int_0^x S(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

2 pavyzdys. Rasime eilučių sumas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

a) Eilutės konvergavimo spindulys yra $R=1$. Sakykime, konvergavimo intervale $(-1, 1)$ šios eilutės suma lygi $S(x)$:

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Šią lygybę išdiferencijavę panariui, gauname

$$S'(x)=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n+1}x^{n-1}+\cdots\ (|x|<1).$$

Tai mažėjanti geometrinė progresija, kurios $q=-x$. Jos suma

$$S'(x)=\frac{1}{1+x},$$

todėl

$$\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

arba

$$S(x)-S(0)=\ln(1+x).$$

Pastebėję, kad $S(0)=0$, randame

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x).$$

b) Jeigu

$$S(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{3n}+\cdots\ (|x|<1),$$

tai

$$S'(x)=x^2+x^5+\cdots+x^{3n-1}+\cdots=\frac{x^2}{1-x^3}.$$

Iš čia integruodami gauname:

$$\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x \frac{t^2dt}{1-t^3}=-\frac{1}{3}\int_0^x \frac{d(1-t^3)}{1-t^3}=-\frac{1}{3}\ln(1-t^3)\Big|_0^x=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

Taigi $S(x)-S(0)=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ ir $S(x)=\ln\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$, nes $S(0)=0$.

c) Sakykime,

$$S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\ (|x|<1).$$

Tuomet

$$\int_0^x S(t)\,dt=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x}.$$

Šią lygybę diferencijuojame panariui ir gauname:

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

t. y.

$$1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1.$$

17. Užsak. Nr. 284.

d) Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{x}{1-x} \quad (|x|<1).$$

Išdiferencijavę ją panariui, gauname:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(2c pavyzdys). Iš čia, padauginę abi lygybės puses iš x, turime:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

9.6. Teiloro* eilutė

Iki šiol nagrinėjome laipsninių eilučių konvergavimą ir ieškojome jų sumų. Tačiau praktikoje dažnai susiduriame su atvirkštiniu uždaviniu: turint funkciją $f(x)$, reikia rasti tokią laipsninę eilutę, kurios suma būtų turimoji funkcija. Jeigu taip padaryti galima, tai sakome, kad duotoji *funkcija yra išreiškiama, arba išskleidžiama, laipsnine eilute.*

Sakykime, kad funkciją $f(x)$ intervale $(-R, R)$ galima išreikšti, arba išskleisti, laipsnine eilute

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \qquad (1)$$

kurios koeficientai $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kol kas nežinomi. Rasime tuos koeficientus.

Iš 9.5 skyrelio 1 savybės išplaukia, kad funkcija $f(x)$ yra kiek norima kartų diferencijuojama. (1) lygybę diferencijuojame n kartų:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots,$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n \times \\ \times (x-x_0)^{n-3} + \cdots,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 3\cdot 2a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0) + \cdots$$

Apskaičiavę funkcijos $f(x)$ ir jos išvestinių reikšmes taške $x = x_0$, turime:

$$f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = a_1,\ f''(x_0) = 2a_2,\ f'''(x_0) = 3\cdot 2a_3,\ \ldots, \\ f^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdots 3\cdot 2a_n,\ \cdots$$

* Taylor Brook (1685—1731) — anglų matematikas.

Iš čia

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \dots \qquad (2)$$

Taigi

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

(3) eilutę vadinsime *funkcijos* $f(x)$ *Teiloro eilute.* (3) eilutė, kai $x_0=0$, tampa šitokia:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \qquad (4)$$

(4) eilutė vadinama *funkcijos* $f(x)$ *Makloreno * eilute.*

Išnagrinėsime funkcijų reiškimo laipsninėmis eilutėmis keletą pavyzdžių. Galima įrodyti, kad nagrinėjamuose pavyzdžiuose gautų laipsninių eilučių sumos jų konvergavimo intervaluose sutampa su atitinkamomis funkcijomis. To įrodymo čia nepateiksime. Išsamesniame aukštosios matematikos kurse pateikiama pavyzdžių funkcijų, kurių Makloreno eilučių sumos konvergavimo srityse nesutampa su tomis funkcijomis.

Pavyzdžiai. 1. Funkciją $f(x)=e^x$ išreiškiame Makloreno eilute.

Kadangi $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ..., $f^{(n)}(x)=e^x$, tai

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n)}(0)=1$$

ir pagal (4) formulę

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \qquad (5)$$

Ištirsime, ar gautoji eilutė konverguoja. Kadangi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

tai (5) eilutė konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

2. Funkciją $f(x)=\sin x$ išskleiskime laipsnine eilute x laipsniais.

Randame funkcijos $f(x)=\sin x$ išvestines:

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ \dots$$

Apskaičiuojame funkcijos $f(x)=\sin x$ ir jos išvestinių reikšmes, kai $x=0$:

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0,\ \dots$$

(toliau išvestinių reikšmės taške $x=0$ kartojasi ta pačia tvarka: (1, 0, −1, 0)).

* Maclaurin Colin (1698—1746) — škotų matematikas.

Vadinasi, pagal (4) formulę

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots \qquad (6)$$

(6) eilutė konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje (įrodykite!).

3. Funkciją $f(x)=\cos x$ išreikškime Makloreno eilutė.

Su funkcija $f(x)=\cos x$ atlikę **2** pavyzdyje nurodytas operacijas, gauname eilutę

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots, \qquad (7)$$

kuri konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

Atkreipsime dėmesį, kad (7) eilutę galėjome gauti ir išdiferencijavę (6) eilutę.

4. Funkciją $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in R$, išreikškime Makloreno eilute.

Apskaičiavę funkcijos $f(x)=(1+x)^\alpha$ ir jos išvestinių

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

reikšmes, kai $x=0$, gauname:

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\quad f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ \dots,$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1).$$

Šias reikšmes įrašę į (4) formulę, turime:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots \qquad (8)$$

(8) eilutę vadinsime binomine eilute.

Kai $\alpha=n$, tai $f(x)=(1+x)^n$. Šiuo atveju $f^{(n+1)}(x)=f^{(n+2)}(x)=$ $=\dots=0$ ir (8) eilutė tampa baigtinio skaičiaus narių suma:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}+$$
$$+\frac{n}{1!}x^{n-1}+x^n, \qquad (9)$$

(9) lygybė vadinama *Niutono binomo formule.*

Ištirsime, ar (8) eilutė konverguoja. Kadangi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}:\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{\alpha}{n}-1}\right|=1,$$

tai (8) eilutė konverguoja intervale $(-1, 1)$.

5. Funkciją $f(x)=\ln(1+x)$ išskleiskime Makloreno eilute.

9.5 skyrelio 2a pavyzdyje įrodėme, kad

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots\ (x\in(-1,\ 1)).\quad(10)$$

(5—10) formulėmis tenka dažnai remtis. Patogumo dėlei pateikiame pagrindinių elementariųjų funkcijų skleidinių Makloreno eilute lentelę.

Nr.	Funkcija	Makloreno eilutė	Konvergavimo intervalas
1	$\frac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-\dots+(-1)^n x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$	$(-1,\ 1)$
2	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$	$(-1,\ 1)$
3	e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ 0!=1$	$(-\infty,\ \infty)$
4	$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty,\ \infty)$
5	$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty,\ \infty)$
6	$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	$(-1,\ 1)$
7	$(1+x)^\alpha$	$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\times$ $\times x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$(-1,\ 1)$
8	$(1+x)^n$	$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}+nx^{n-1}+x^n$	

Remdamiesi lentele, išskleiskime Makloreno eilute keletą sudėtingesnių funkcijų.

Pavyzdžiai. 6. Funkciją $f(x)=\cos^2 3x^2$ išskleiskime Makloreno eilute.

Funkciją pertvarkome šitaip:

$$f(x)=\cos^2 3x^2=\frac{1}{2}(1+\cos 6x^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos y;\ \text{čia}\ y=6x^2.$$

Pasinaudoję lentelės 5 formule, gauname

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}\cdots-\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{6^2x^4}{2!}+\frac{6^4x^8}{4!}-\frac{6^6x^{12}}{6!}+\cdots\right).$$

Gautoji eilutė konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

7. Funkciją $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ išskleiskime laipsnine eilute x laipsniais remdamiesi lentelės 7 formule.

Į šią formulę vietoje α įrašę $-\frac{1}{2}$ ir x pakeitę $-x^2$, turime:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1!}(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2+\cdots+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n+\cdots=$$

$$=1+\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{1\cdot 3x^4}{2^2 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}x^6+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\cdots$$

Gautoji eilutė konverguoja, kai $|-x^2|<1$, t. y. kai $|x|<1$.

8. Funkciją $f(x)=\operatorname{arctg} x$ išskleiskime Makloreno eilute.

Pirmojoje lentelės formulėje x pakeitę x^2, gausime eilutę

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

kuri konverguoja absoliučiai intervale $(-1, 1)$. Ją intergruojame panariui ir gauname:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

arba

$$\operatorname{arctg} t\Big|_0^x=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 0=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

Kadangi $\operatorname{arctg} 0=0$, tai

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Funkciją $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ išskleiskime Teiloro eilute $x-2$ laipsniais.

Galima tiesiogiai skaičiuoti funkcijos išvestines, jų reikšmes taške $x=2$ ir remtis 9.5 skyrelio (3) formule. Darysime kitaip. Įvesime naują kintamąjį $x-2=t$, t. y. $x=t+2$. Tada

$$f(x)=f(t+2)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(t+2)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}t.$$

Dabar lentelės 5 formulėje vietoje x įrašę $\frac{\pi}{4}t$, gauname:

$$f(t+2)=1-\frac{\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\pi}{4}t\right)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{4}t\right)^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

Grįžtame prie ankstesnio kintamojo:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}(x-2)^2+$$
$$+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}(x-2)^4+\cdots+(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{4^{2n}\cdot(2n)!}(x-2)^{2n}+\cdots$$

Ši eilutė konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

9.7. Laipsninių eilučių taikymai

Remiantis funkcijų skleidiniais laipsninėmis eilutėmis, galima apskaičiuoti tų funkcijų apytiksles reikšmes, apibrėžtinius integralus, jei pastarieji neišreiškiami elementariosiomis funkcijomis, įvertinti padarytas paklaidas ir kt.

Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

Pavyzdžiai. 1. Išvesime formulę sveikųjų teigiamų skaičių natūraliojo logaritmo apytikslėms reikšmėms skaičiuoti.

Lentelėje pateikta 6 eilutė netinka, nes ji diverguoja, kai $x>1$. Tačiau ja remdamiesi gausime kitą eilutę. 6 eilutėje x pakeitę $-x$, gauname eilutę

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\cdots,$$

kuri konverguoja intervale $(-1, 1)$. Iš 6 eilutės atimame gautąją eilutę:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right). \quad (1)$$

Ši eilutė taip pat konverguoja intervale $(-1, 1)$.

Dabar imkime

$$x=\frac{1}{2N+1};$$

čia N — bet koks natūralusis skaičius. Tada $0<x<1$. Šią x reikšmę įrašę į (1) formulę, gauname:

$$\ln\frac{N+1}{N}=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2N+1)^7}+\cdots\right). \qquad (2)$$

Imdami $N=1$, $N=2$, $N=3$, $\cdots$, galime apskaičiuoti bet kokio natūraliojo skaičiaus logaritmą norimu tikslumu.

Pavyzdžiui, kai $N=1$, gauname:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

Apskaičiuosime $\ln 2$ reikšmę 10^{-3} tikslumu. Įsitikinsime, kad užtenka apskaičiuoti tik trijų narių dalinę sumą S_3. Iš tikrųjų

$$R_3=2\left(\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right)=\frac{2}{3^7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9\cdot 3^2}+\frac{1}{11\cdot 3^4}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{2}{3^7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots\right)=\frac{2}{3^7}\cdot\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{3^8}<0{,}0002<0{,}001.$$

Taigi

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}\right)=0{,}6930.$$

Į (2) formulę įrašę $N=4$, gauname

$$\ln 5=2\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3\cdot 9^2}+\frac{1}{5\cdot 9^4}+\cdots\right)=1{,}6094.$$

Dabar jau nesunku apskaičiuoti

$$\ln 10=\ln 2+\ln 5=2{,}3024.$$

Remdamiesi formule

$$\lg N=\frac{\ln N}{\ln 10}=M\ln N,$$

kai $M=\frac{1}{\ln 10}=0{,}43429...$, galime apskaičiuoti natūraliųjų skaičių dešimtainių logaritmų reikšmes. Iš (2) formulės gauname

$$\lg(n+1)=\lg n+2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^3}+\cdots\right). \qquad (3)$$

Pavyzdžiui, kai $n=100$,

$$\lg 101=2+2\cdot 0{,}4343\cdot\frac{1}{201}+\cdots=2{,}0043.$$

2. Apskaičiuosime funkcijos $f(x)=e^x$ reikšmę, kai $x=0{,}2$, 10^{-4} tikslumu.

Iš lentelės 3 formulės, kai $x=0{,}2$, gauname

$$e^{0,2}=1+0{,}2+\frac{0{,}2^2}{2!}+\frac{0{,}2^3}{3!}+\frac{0{,}2^4}{4!}+\cdots$$

Apskaičiuosime, kiek reikia imti tos eilutės narių, kad paklaida būtų ne didesnė už 10^{-4}. Įvertinsime eilutės liekaną:

$$R_n=\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{0{,}2^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots=\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{0{,}2}{n+2}+\frac{0{,}2^2}{(n+2)(n+3)}\cdots\right)<$$

$$<\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{0{,}2}{n}+\frac{0{,}2^2}{n^2}+\cdots\right)=\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{0{,}2}{n}}=\frac{0{,}2^{n+1}\cdot n}{(n+1)!(n-0{,}2)}.$$

Imdami $n=2$, gauname $R_2<0{,}002$. Kai $n=3$, $R_3=\frac{(0{,}2)^4\cdot 3}{4!\cdot 2{,}8}<$ $<0{,}0001$. Vadinasi,

$$e^{0,2}=1+0{,}2+\frac{(0{,}2)^2}{2!}+\frac{(0{,}2)^3}{3!}=1{,}2213,$$

taigi paklaida ne didesnė už 10^{-4}.

3. Apskaičiuosime $\sqrt[3]{130}$ 10^{-4} tikslumu.

Kad galėtume remtis lentelės 7 formule, šaknį $\sqrt[3]{130}$ pertvarkome šitaip:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}.$$

Kai $\alpha=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{25}$, iš 7 formulės

$$\sqrt[3]{130}=5\left(1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}+\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!\cdot 5^8}+\cdots\right).$$

Gautoji eilutė yra alternuojanti, todėl paklaida bus ne didesnė už pirmojo atmetamojo nario absoliutųjį didumą.

Kadangi

$$5:3\cdot 5^2=0{,}06667,$$
$$10:3^2\cdot 2!\cdot 5^4=0{,}00089,$$
$$50:3^3\cdot 3!\cdot 5^6=0{,}00002,$$

tai

$$\sqrt[3]{130}=5+0{,}06667-0{,}00089=5{,}06578.$$

4. Apskaičiuosime $\cos 1°$ 10^{-5} tikslumu.

Kadangi $1°=\frac{\pi}{180}$, tai pagal lentelės 5 formulę

$$\cos 1°=1-\frac{\pi^2}{180^2\cdot 2!}+\frac{\pi^4}{180^4\cdot 4!}-\cdots$$

Skaičiuojame gautosios eilutės narių reikšmes, kol gausime narį, mažesnį už 10^{-5}:

$$\frac{\pi^2}{180^2\cdot 2!}=\frac{3{,}141592^2}{180^2\cdot 2}=0{,}000152,$$

$$\frac{\pi^4}{180^4\cdot 4!}=\frac{3{,}141592^4}{180^4\cdot 24}<0{,}000001.$$

Taigi

$$\cos 1^\circ=1-0{,}000152=0{,}999848.$$

5. Apskaičiuosime integralą $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^2e^{-x^2}dx$, imdami tik du pointegralinio reiškinio skleidinio eilute x laipsniais narius. Įvertinsime paklaidą.

Lentelės 3 formulėje x pakeitę $-x^2$, gauname:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\quad x\in R.$$

Šią eilutę dauginame iš x^2:

$$x^2e^{-x^2}=x^2-\frac{x^4}{1!}+\frac{x^6}{2!}-\ldots,\quad x\in R.$$

Integruojame panariui intervale $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$ ir gauname:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^2e^{-x^2}dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7\cdot 2!}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{5\cdot 4^5}+\frac{1}{7\cdot 2!\cdot 4^7}-\ldots.$$

Tai alternuojančioji eilutė. Jos sumą pakeitę pirmųjų dviejų narių suma, padarysime paklaidą, mažesnę už $\frac{1}{7\cdot 2!\cdot 4^7}=0{,}000004<$ $<0{,}00001$. Atlikę skaičiavimus 10^{-5} tikslumu, gauname

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^2e^{-x^2}dx=0{,}005208-0{,}000195=0{,}005013.$$

6. Apskaičiuosime funkcijos $f(x)=x^4\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ devintosios išvestinės reikšmę, kai $x=0$.

Tiesiogiai skaičiuodami devintąją išvestinę, gautume didelius reiškinius ir tektų sugaišti nemažai laiko. Pirmiausia funkciją $f(x)$ išreikšime laipsnine eilute x laipsniais, po to skaičiuosime jos išvestines. Pagal lentelės 6 formulę $\left(x \text{ pakeitę } \frac{x}{2}\right)$ gauname

$$f(x)=x^4\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=x^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots\right)=\frac{x^5}{2}-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{24}x^7-$$
$$-\frac{1}{64}x^8+\frac{1}{160}x^9-\frac{1}{384}x^{10}+\ldots$$

Ši eilutė konverguoja, kai $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, t. y. kai $|x|<2$, ir ją galima kiek norima kartų diferencijuoti.

Išdiferencijavę 9 kartus, gauname

$$f^{(9)}(x)=\frac{9!}{160}-\frac{10!}{384}x+\ldots$$

Taigi, kai $x=0$,

$$f^{(9)}(0)=\frac{9!}{160}=2268.$$

Atkreipsime dėmesį, kad, ieškant funkcijos $f(x)$ n-osios išvestinės reikšmės taške $x=0$, užtenka rasti tos funkcijos skleidinio Makloreno eilute koeficientą prie x^n ir remtis 9.6 skyrelio (2) formulėmis:

$$f^{(n)}(0)=n!a_n.$$

Pavyzdžiui, nagrinėjamosios funkcijos $f^{(6)}(0)=-\frac{6!}{8}=-\frac{720}{8}=$ $=-90.$

9.8. Kompleksinių skaičių eilutės

Šiame skyrelyje trumpai susipažinsime su eilutėmis, kurių nariai yra kompleksiniai skaičiai.

Eilutę

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n, \tag{1}$$

$c_n=a_n+ib_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, a_n, $b_n\in R$, vadinsime *kompleksinių skaičių eilute.*

Kartu su šia eilute nagrinėsime eilutes

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{2}$$

ir

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \tag{3}$$

sudarytas iš (1) eilutės narių realiųjų ir menamųjų dalių.

Sakysime, kad (1) *eilutė konverguoja,* jeigu konverguoja (2) ir (3) eilutės. Jeigu A yra (2) eilutės suma, o B — (3) eilutės suma, tai skaičius $C=A+iB$ vadinamas (1) *eilutės suma.*

Kaip ir nagrinėdami realiųjų skaičių eilutes, sakysime, kad (1) *eilutė konverguoja absoliučiai,* jeigu konverguoja eilutė, sudaryta iš (1) eilutės narių modulių, t. y.

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+\cdots+|c_n|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|. \qquad (4)$$

Teorema. *Jeigu konverguoja* (4) *eilutė, tai konverguoja ir* (1) *eilutė.*

Įrodymas. Kadangi (4) eilutė konverguoja ir $|c_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, o $|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|b_n|\geqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, tai pagal teigiamųjų eilučių pirmąjį palyginimo požymį (9.3 skyrelio 2 teorema) eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ir $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ konverguoja. Iš 9.4 skyrelio 1 teoremos išplaukia, kad (2) ir (3) eilutės konverguoja, taigi konverguoja ir (1) eilutė.

Šiame skyrelyje apsiribosime tik absoliučiai konverguojančiomis kompleksinių skaičių eilutėmis. Jų konvergavimui tirti taikysime Dalambero požymį.

1 pavyzdys. Ištirsime, ar konverguoja šios eilutės:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+i\frac{1}{5^n}\right);\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}+\frac{i}{n^2}\right);\quad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n-1}}{n!}.$$

a) Kadangi eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ir $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ konverguoja, tai konverguoja ir kompleksinių skaičių eilutė;

b) Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{2n+5}$ diverguoja $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+5}=1\neq0\right)$, taigi diverguoja ir kompleksinių skaičių eilutė.

c) Šiame pavyzdyje paprasčiau tirti, ar konverguoja eilutė, sudaryta iš duotosios eilutės narių modulių. Kadangi $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, tai $|c_n|=\frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{n!}$, $|c_{n+1}|=\frac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)!}$.

Pagal Dalambero požymį

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(\sqrt{2})^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0<1.$$

Vadinasi, eilutė, sudaryta iš duotosios eilutės narių modulių, konverguoja, todėl konverguoja ir duotoji eilutė.

Eilutė

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n, \tag{5}$$

kai $c_n=a_n+ib_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $z=x+iy$ ir a_n, b_n, x, $y\in R$, vadinama *laipsnine eilute*.

Pagal įrodytą teoremą tokia eilutė konverguoja, jei konverguoja eilutė

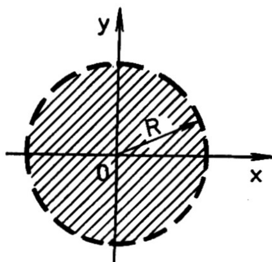
$$|c_0|+|c_1||z|+|c_2||z|^2+\ldots+|c_n||z|^n+\ldots, \tag{6}$$

sudaryta iš (5) eilutės modulių. Jos konvergavimą tirsime remdamiesi Dalambero požymiu. Kadangi

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||z^{n+1}|}{|c_n||z|^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

tai (6) eilutė konverguoja su visomis z reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybę

$$\frac{|z|}{R}<1, \text{ arba } |z|<R$$



165 pav.

(165 pav.), kai

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.}$$

Jeigu $R=0$, (6) eilutė konverguoja tik taške $z=0$, o kai $R=\infty$ — visoje kompleksinėje plokštumoje.

Pavyzdys. Eilutė

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{7}$$

konverguoja visoje kompleksinėje plokštumoje, nes

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Kai $z=x$, gaunome eilutę

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

kurios suma yra e^x. Todėl natūralu (7) eilutės sumą žymėti e^z:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \tag{8}$$

(8) eilutėje z pakeitę ix, turime:

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\ldots+\frac{(ix)^n}{n!}+\ldots=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+$$

$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right),$$

t. y.

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{9}$$

(9) lygybė vadinama *Oilerio formule*. Galima įrodyti, kad

$$\boxed{e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).} \tag{10}$$

9.9. Trigonometrinės eilutės

9.9.1. Funkcijos $f(x)$ Furjė* eilutė. 9.6 skyrelyje funkciją $f(x)$ išskleidėme laipsnine eilute x laipsniais. Tačiau, tiriant sudėtingus periodinius procesus, vykstančius gamtoje, tenka funkciją $f(x)$ reikšti paprasčiausiomis trigonometrinėmis funkcijomis $\sin nx$, $\cos nx$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Eilutę

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+$$

$$+b_n\sin nx)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

kai $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ — realieji skaičiai, vadinsime *trigonometrine eilute*.

Visi (1) eilutės nariai yra periodinės funkcijos, turinčios bendrą periodą 2π. Vadinasi, jeigu (1) eilutė konverguoja, tai jos suma yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus 2π.

Sakykime, kad (1) eilutė konverguoja ir jos suma lygi $f(x)$. Rasime formules koeficientams a_0, a_n, b_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ apskai-

* Fourier Jean Baptiste Joseph (1768—1830) — prancūzų matematikas.

čiuoti. Paprastumo dėlei apsiribosime atveju, kai (1) eilutė turi tik baigtinį narių skaičių:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

(2) lygybę integruokime panariui intervale $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

Kadangi

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin n\pi-\sin(-n\pi)}{n}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\cos n\pi-\cos(-n\pi)}{n}=0,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

tai

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx=\frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=a_0\pi.$$

Iš čia randame a_0:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Norėdami rasti koeficientą a_1, (2) eilutę dauginame iš $\cos x$ ir integruojame panariui:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot dx+\left(a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx+\right.$$

$$+b_1\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x\cos x\,dx)+\left(a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos x\,dx+b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos x\,dx\right)+$$

$$+\cdots+\left(a_N\int_{-\pi}^{\pi}\cos Nx\cos x\,dx+b_N\int_{-\pi}^{\pi}\sin Nx\cos x\,dx\right).$$

Kadangi

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x d(\sin x)=\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos x dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ N,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos x dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ N,$$

tai

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x dx=a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx=a_1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{a_1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=a_1\pi.$$

Vadinasi,

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x dx.$$

(2) lygybę padauginę iš $\sin x$ ir ją suintegravę intervale $[-\pi, \pi]$, randame koeficientą b_1:

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x dx.$$

Padauginę (2) lygybę atitinkamai iš $\cos nx$ ir $\sin nx$ ir suintegravę intervale $[-\pi, \pi]$, randame koeficientus a_n ir b_n:

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N.} \quad (4)$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N.} \quad (5)$$

Taigi šiuo paprastu atveju radome visus koeficientus.

Sakykime, duota funkcija $f(x)$, integruojama intervale $[-\pi, \pi]$. Pagal (3—5) formules apskaičiuojame koeficientus a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... ir sudarome eilutę

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx). \qquad (6)$$

Taip sudarytą eilutę vadinsime *funkcijos* $f(x)$ *Furjė eilute,* o koeficientus a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, 3, \cdots$,— *funkcijos* $f(x)$ *Furjė koeficientais.* Rašysime

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx). \qquad (7)$$

Iškyla du klausimai: 1) ar konverguoja (6) eilutė? 2) jeigu (6) eilutė konverguoja, tai ar jos suma lygi $f(x)$?

Į šiuos klausimus atsako *Dirichlė* * teorema, kurią suformuluosime be įrodymo.

Teorema. *Jeigu:* 1) *funkcija* $f(x)$ *intervale* $[-\pi, \pi]$ *turi baigtinį pirmosios rūšies trūkio taškų skaičių;* 2) *intervalą* $[-\pi, \pi]$ *galima suskaidyti į dalis, kuriose funkcija* $f(x)$ *yra monotoninė ir tolydi, tai funkcijos* $f(x)$ *Furjė eilutė konverguoja tame intervale, o jos suma* $S(x)$ *pasižymi šiomis savybėmis:*

1) *jeigu taške* $x_0 \in (-\pi, \pi)$ *funkcija* $f(x)$ *yra tolydi, tai*

$$S(x_0)=f(x_0);$$

2) *jeigu taške* x_1 *funkcija* $f(x)$ *yra trūki, tai*

$$S(x_1)=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2},$$

kai $f(x_1-0)=\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$, $f(x_1+0)=\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x)$;

3) $S(-\pi)=S(\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$

Pastabos. 1. Kadangi visi Furjė eilutės nariai yra periodinės funkcijos (turinčios bendrą periodą 2π), tai iš eilutės konvergavimo intervale $[-\pi, \pi]$ išplaukia, kad ji konverguoja visoje realiųjų skaičių tiesėje.

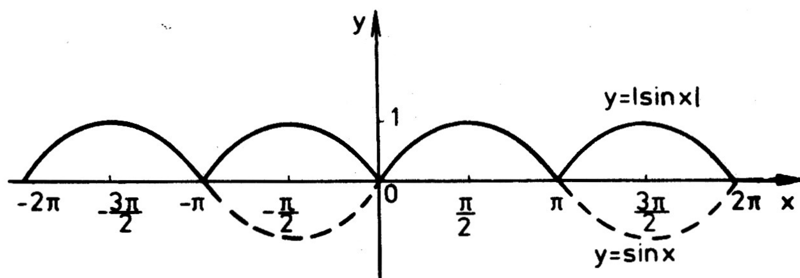
2. Jeigu funkcijos $f(x)$ periodas yra 2π, tai Dirichlė teorema teisinga ne tik intervale $[-\pi, \pi]$, bet ir intervaluose $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$, $n=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

3. Jeigu funkcija $f(x)$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje ir yra neperiodinė, tai Furjė eilutės suma už intervalo $[-\pi, \pi]$ ribų skiriasi nuo $f(x)$.

4. Remiantis Dirichlė teorema, galima nubraižyti Furjė eilutės sumos grafiką, neapskaičiavus tos eilutės Furjė koeficientų.

---

* Dirichlet Peter Gustav Lejeune (1805—1859) — vokiečių matematikas.



166 pav.

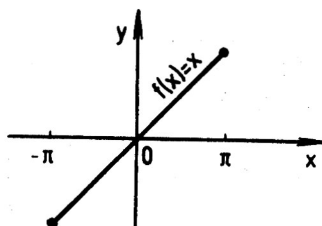
Pavyzdžiai. 1. Funkcija $f(x)=|\sin x|$ tenkina Dirichlė teoremos reikalavimus: intervaluose $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ yra monotoninė ir tolydi (166 pav.), todėl jos Furjė eilutė konverguoja. Be to, $S(x)=f(x)$, jei $x\in(-\pi, \pi)$ ir

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0=f(\pi).$$

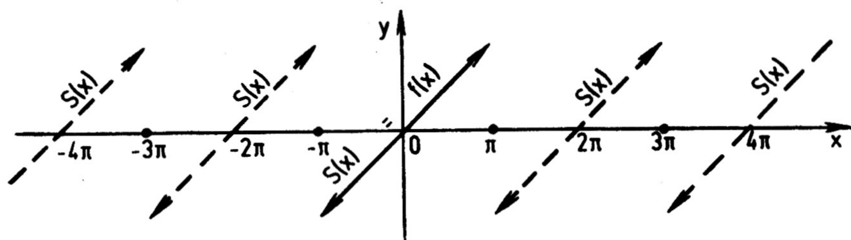
Taigi $S(x)=f(x)$, jei $x\in[-\pi, \pi]$. Kadangi funkcijos $f(x)=|\sin x|$ periodas yra 2π (jos mažiausias periodas π), tai $S(x)=f(x)$ visoje realiųjų skaičių tiesėje. Šios funkcijos Furjė eilutę rasime vėliau.

2. Funkciją $f(x)=x$, $x\in[-\pi, \pi]$, (167 pav.) išskleisime Furjė eilute ir nubraižysime tos eilutės sumos grafiką.

Ši funkcija yra monotoninė ir tolydi, todėl jos Furjė eilutė konverguoja. Be to, $S(x)=x$, jei $x\in(-\pi, \pi)$ ir $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$. Funkcijos $f(x)=x$ Furjė eilutės sumos grafikas pavaizduotas 168 paveiksle. Jame matyti, kad funkcija $f(x)=x$ ir jos Furjė eilutės suma už intervalo $[-\pi, \pi]$ ribų nesutampa.



167 pav.



168 pav.

Remdamiesi (3—5) formulėmis, apskaičiuosime nagrinėjamos funkcijos Furjė koeficientus:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\sin nx)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}(x\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\cos nx)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(x\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\cos n\pi}{n}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

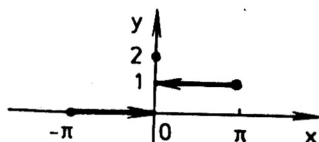
Taigi

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right),\quad x\in(-\pi,\ \pi).$$

3. Funkciją

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 2, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

(169 pav.) išskleisime Furjė eilute ir nubraižysime jos sumos grafiką.



169 pav.

Ši funkcija trūki tik taške $x=0$. Apskaičiuosime jos Furjė koeficientus:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{\cos n\pi}{n\pi}+\frac{\cos 0}{n\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & \text{jei } n \text{ — nelyginis,}\\ 0, & \text{jei } n \text{ — lyginis.}\end{cases}$$

Taigi

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right).$$

Be to,

$$S(x)=f(x),\ \text{jei}\ x\in(-\pi,\ 0)\cup(0,\ \pi),\ S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=$$

$$=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\ S(-\pi)=S(\pi)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

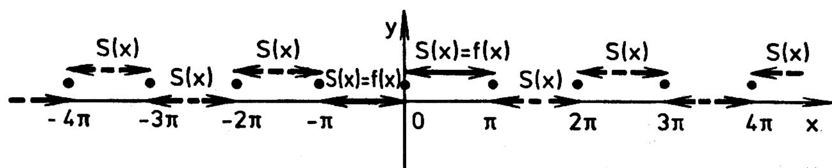
Pažymėsime, kad Furjė eilutės suma nepriklauso nuo funkcijos $f(x)$ reikšmių trūkio taškuose ir intervalo $[-\pi,\ \pi]$ galuose. 170 paveiksle pavaizduotas nagrinėjamosios funkcijos Furjė eilutės sumos grafikas.

9.9.2. Lyginių ir nelyginių funkcijų Furjė eilutės. Priminsime, kad funkcija $f(x)$, apibrėžta intervale $[-\pi,\ \pi]$, vadinama lygine, jeigu

$$f(-x)=f(x),$$

ir nelygine, jeigu

$$f(-x)=-f(x).$$



170 pav.

Šių funkcijų Furjė koeficientai randami paprasčiau. Turime

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Po keitinio $x=-t$, $dx=-dt$, gauname

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(-t)\,(-dt) = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{\pi} f(-t)\,dt = \int_{0}^{\pi} f(-x)\,dx.$$

Vadinasi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} (f(-x)+f(x))\,dx.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad tuo atveju, kai funkcija $f(x)$ lyginė,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

ir, kai $f(x)$ — nelyginė funkcija,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Jeigu funkcija $f(x)$ lyginė, tai funkcija $f(x)\cos nx$ yra lyginė, o funkcija $f(x)\sin nx$ — nelyginė, todėl

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{gathered}} \qquad (8)$$

Vadinasi, lyginės funkcijos Furjė eilutėje yra tik kosinusai, t. y.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (9)$$

Jeigu funkcija $f(x)$ nelyginė, tai funkcija $f(x)\cos nx$ — nelyginė, o funkcija $f(x)\sin nx$ — lyginė, todėl

$$
\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{aligned}} \qquad (10)
$$

Taigi nelyginės funkcijos Furjė eilutėje yra tik sinusai, t. y.

$$
f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (11)
$$

Pavyzdžiai. 4. Parašysime **1** pavyzdyje nagrinėtos funkcijos $f(x) = |\sin x|$ Furjė eilutę.

Kadangi funkcija yra lyginė, tai $b_n = 0$. Apskaičiuosime kitus koeficientus:

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi};
$$

$$
a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx =
$$

$$
= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 0;
$$

jei $n \geqslant 2$, tai

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx\,dx =
$$

$$
= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Big|_0^{\pi} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{\cos(n+1)\pi - \cos 0}{(n+1)\pi} + \frac{\cos(n-1)\pi - \cos 0}{(n-1)\pi} =
$$

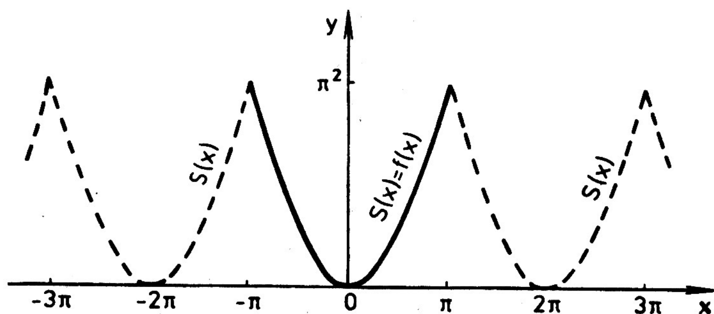
$$
= \frac{1-(-1)^{n+1}}{(n+1)\pi} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{(n-1)\pi} = \frac{1-(-1)^{n-1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) =
$$

$$
= \frac{1-(-1)^{n-1}}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2-1} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{2}{n^2-1}, & \text{jei } n \text{ — lyginis,} \\ 0, & \text{jei } n \text{ — nelyginis.} \end{cases}
$$

Vadinasi,

$$
|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots\right).
$$

5. Funkciją $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, išskleisime Furjė eilute ir nubraižysime eilutės sumos grafiką.



171 pav.

Nagrinėjamoji funkcija yra lyginė, todėl $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^\pi=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2d(\sin nx)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(x^2\sin nx\bigg|_0^\pi-2\int_0^\pi x\sin nxdx\right)=-\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nxdx=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi xd(\cos nx)=\frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\pi\cos n\pi=\frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}.$$

Kadangi funkcija $f(x)=x^2$ intervale $[-\pi, \pi]$ yra tolydi ir $S(-\pi)=$ $=S(\pi)=\frac{(-\pi)^2+\pi^2}{2}=\pi^2=f(\pi)$, tai

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(-\cos x+\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{9}+\cdots\right),\ x\in[-\pi, \pi]. \quad (12)$$

Furjė eilutės sumos grafikas pavaizduotas 171 paveiksle.

(12) eilute galima naudotis skaičiuojant kai kurių skaičių eilučių sumas. Pavyzdžiui, kai $x=\pi$, gauname skaičių eilutę

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Iš čia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Kai $x=0$, iš (12) eilutės gauname

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

t. y.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

9.9.3. Funkcijos $f(x)$ skleidimas Furjė eilute intervale $[0, \pi]$. Nors funkcija $f(x)$ ir tenkina intervale $[0, \pi]$ Dirichlė teoremos reikalavimus, vis tik jos negalima išskleisti Furjė eilute taikant (3—5) formules. Norint tai padaryti, reikia funkciją $f(x)$ papildomai apibrėžti intervale $[-\pi, 0]$. Toks funkcijos papildomas apibrėžimas vadinamas jos *pratęsimu*. Funkciją $f(x)$ galima pratęsti įvairiai. Dažniausiai pratęsiama taip, kad gautoji funkcija intervale $[-\pi, \pi]$ būtų lyginė arba nelyginė. Šiais atvejais galima taikyti (8) arba (10) formules, tada praktiškai funkcijos pratęsti nereikia. Nuo pratęsimo pobūdžio priklauso $S(0)$ ir $S(\pi)$ reikšmės.

6 pavyzdys. Funkciją $f(x)=x$, $x\in[0, \pi]$, išreikšime: a) sinusais; b) kosinusais.

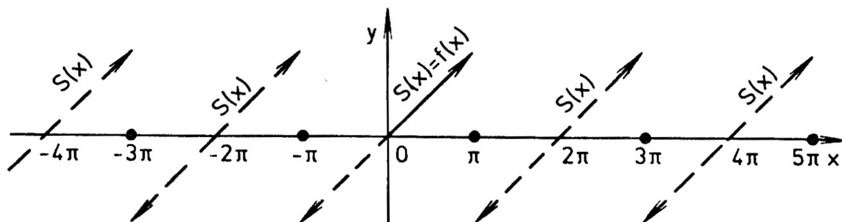
a) Pratęsę $f(x)=x$ taip, kad pratęstoji funkcija intervale $[-\pi, \pi]$ būtų nelyginė, gausime 2 pavyzdyje nagrinėtą funkciją. Kadangi $S(0)=0$, $S(-\pi)=S(\pi)=0$, tai

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right),\quad x\in[0, \pi).$$

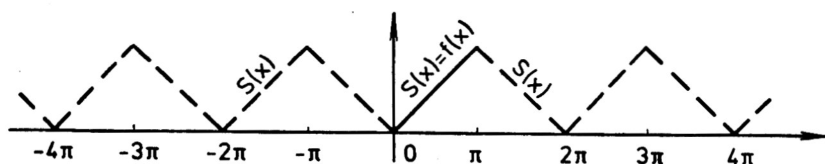
Furjė eilutės sumos grafikas pavaizduotas 172 paveiksle.

b) Jeigu funkciją $f(x)=x$ pratęsime taip, kad gautoji funkcija intervale $[-\pi, \pi]$ būtų lyginė, tai

$$S(-\pi)=S(\pi)=\pi=f(\pi),\quad S(0)=0.$$



172 pav.



173 pav.

Pagal (8) formules

$$b_n=0;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, \text{ kai } n \text{ — lyginis,}\\ -\frac{4}{\pi n^2}, \text{ kai } n \text{ — nelyginis.}\end{cases}$$

Vadinasi,

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\cdots\right),\quad x\in[0,\ \pi].$$

Furjė eilutės sumos grafikas pavaizduotas 173 paveiksle.

9.9.4. Funkcijos $f(x)$ skleidimas Furjė eilute intervale $[-l,\ l]$. Atlikę keitinį $x=\frac{lt}{\pi}$, gauname funkciją $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, apibrėžtą intervale $[-\pi,\ \pi]$ (kai x kinta intervale $[-l,\ l]$, t kinta intervale $[-\pi,\ \pi]$). Remdamiesi (3—5) formulėmis, šią funkciją išreiškiame Furjė eilute:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt);$$

čia

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt\,dt,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt\,dt,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Grįžkime prie kintamojo x. Kadangi $t=\frac{\pi x}{l}$, $dt=\frac{\pi}{l}dx$, tai

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right);\qquad (13)$$

čia

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{14}$$

Jeigu funkcija $f(x)$ yra lyginė, tai (14) formulės tampa paprastesnės:

$$b_n=0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{15}$$

o jei funkcija $f(x)$ nelyginė, tai

$$a_n=0, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{16}$$

7 pavyzdys. Funkciją $f(x)=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, išreikškime Furjė eilute.

Šiuo atveju funkcija yra lyginė ir $l=\frac{\pi}{2}$. Remdamiesi (15) formulėmis, gauname:

$$b_n=0, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$a_0=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{4}{\pi}\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi};$$

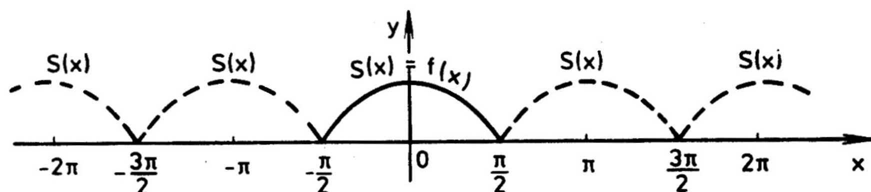
$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\frac{\pi n x}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$



174 pav.

Funkcija $f(x) = \cos x$ yra tolydi ir $S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, todėl

$$\cos x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{17}$$

Kai $x = \frac{\pi}{2}$, iš (17) eilutės gauname

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2},$$

o kai $x = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Funkcijos $f(x) = \cos x$ Furjė eilutės sumos grafikas pavaizduotas 174 paveiksle.

9.10. Pratimai

Raskite eilutės bendrąjį narį:

1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \dots$

2. $\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{4}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \frac{6}{4\cdot 5} + \dots$

3. $\frac{5}{3} + \frac{7}{6} + \frac{9}{9} + \frac{11}{12} + \dots$

4. $\frac{2}{2} + \frac{5}{4} + \frac{8}{8} + \frac{11}{16} + \dots$

5. $\frac{4}{1001} + \frac{7}{2001} + \frac{12}{3001} + \frac{19}{4001} + \dots$

6. $\frac{5}{6} + \frac{8}{9} + \frac{11}{14} + \frac{14}{21} + \dots$

7. $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \dots$

8. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{27} - \frac{4}{81} + \dots$

9. $\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{9} - \frac{10}{17} + \dots$

10. $\frac{1}{5} - \frac{3}{7} + \frac{5}{11} - \frac{7}{19} + \dots$

Įrodykite, kad eilutės diverguoja:

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{2n+3}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{4n+3}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{n^2+9}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{4n^2+2n+7}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

Ištirkite, ar eilutės konverguoja; raskite sumą, jeigu eilutė konverguoja:

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$.

19. $0{,}02+0{,}002+0{,}0002+\ldots$

20. $100-10+1-0{,}1+\ldots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n$.

22. $4+1+\frac{1}{4}+\ldots$

23. $-4+2-1+\ldots$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{n}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$.

Remdamiesi palyginimo teoremomis, ištirkite, ar konverguoja šios eilutės:

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+7}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+1}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+7}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n+3}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{n}}$.

Remdamiesi Dalambero ar Koši požymiais, ištirkite, ar eilutės konverguoja:

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4^n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^2+3}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n+5)}{n!}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 3^n}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n-1}{9n+2}\right)^{2n}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{4n-1}\right)^{n/2}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{4n-3}\right)^{n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Ištirkite, ar eilutės konverguoja absoliučiai ir reliatyviai:

51. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{3n}$.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n}$.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$.

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 100^n}{n!}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{4n+5}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{7n-5}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n^2+3)}{3n^2+5}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$.

Kiek reikia paimti eilutės narių, kad S_n nuo S skirtųsi mažiau kaip 10^{-3}:

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 9^n}$.

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{n!}$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$.

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n!}$.

Raskite eilučių konvergavimo intervalus:

66. $\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n$.

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n x^n}$.

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}x^n}{n}$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$.

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$.

71. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n+4}x^n$.

72. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+4}}$.

73. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+3)}{(n+4)!}(x-5)^n$.

74. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!(x-3)^n$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n^3}$.

76. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^n$.

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n)!}$.

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-4)^n$.

79. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!(x-2)^n}{2^n\cdot(3n+4)}$.

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-6)^n}{n^5}$.

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5n}(x-4)^n$.

82. $\sum_{n=0}^{\infty}n(x-3)^n$.

83. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}(x-0{,}5)^n$.

84. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+7)!(x+5)^n$.

85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{x-7}{2}\right)^n$.

86. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n+2}(x-3)^n$.

87. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5n+4}{(n+2)!}(x-4)^n$.

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{3^n\cdot n^2}$.

89. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$.

90. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+7}x^n$.

Raskite eilučių konvergavimo intervalus ir eilučių sumas:

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

93. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

94. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$.

95. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Išskleiskite $x-a$ laipsniais šias funkcijas:

96. $f(x)=\ln(6x-5)$, $a=1$.

97. $f(x)=\ln(2x+5)$, $a=-2$.

98. $f(x)=\ln(3x+4)$, $a=-1$.

99. $f(x)=\ln(2x-5)$, $a=3$.

100. $f(x)=\ln(3x+7)$, $a=-2$.

101. $f(x)=\frac{1}{2x+5}$, $a=-1$.

102. $f(x)=\frac{1}{3x-2}$, $a=2$.

103. $f(x)=\frac{1}{3x+5}$, $a=-1$.

104. $f(x)=\frac{1}{2x+9}$, $a=-3$.

105. $f(x)=\frac{1}{3-2x}$, $a=2$.

Išreikškite $x-a$ laipsniais:

106. $f(x)=3x^5-4x^3+7x-1$, $a=-1$.

107. $f(x)=4x^3-6x^2+5$, $a=-1$.

108. $f(x)=x^2-7x+10$, $a=5$.

109. $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, $a=1$.

110. $f(x)=x^3-3x^2+4x+2$, $a=-4$.

Išskleiskite funkcijas Makloreno eilutėmis:

111. $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

112. $f(x)=x\sin 4x^2$.

113. $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$.

114. $f(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

115. $f(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$.

Apskaičiuokite funkcijų reikšmes 10^{-n} tikslumu:

116. e^{-1}, $n=4$.

117. $\sqrt[4]{20}$, $n=3$.

118. $\ln 1{,}2$, $n=4$.

119. $\sin 18°$, $n=3$.

120. $e^{-0{,}25}$, $n=4$.

Apskaičiuokite integralus 10^{-n} tikslumu:

121. $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, $n=3$.

122. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x^4}$, $n=3$.

123. $\int_0^1 \sin x^2 dx$, $n=4$.

124. $\int_0^{\frac{1}{4}}\ln(1+\sqrt{x})dx$, $n=3$.

125. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$, $n=3$.

Raskite $f^{(n)}(0)$:

126. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n=10$.

127. $f(x)=x^3\sqrt[4]{1+x}$, $n=7$.

128. $f(x)=x^5\cos\frac{x}{2}$, $n=11$.

129. $f(x)=x^4\ln(1-x^2)$, $n=7$.

130. $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $n=6$.

Ištirkite eilučių konvergavimą:

131. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{i}{2^n}\right)$.

132. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{n}\right)^n$.

133. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{i}{3^n}\right)$.

134. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)$.

135. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+1}+\frac{i}{n^2}\right)$.

Raskite eilučių konvergavimo sritis:

136. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(2n)^2}$.

137. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{in}{5^n}z^n$.

138. $\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n z^n$.

139. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3in}{n^2+1}z^n$.

140. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^{n+1}}{\sqrt{n}}z^n$.

Išreikškite funkcijas Furjė eilutėmis:

141. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 0, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

142. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

143. $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi\leqslant x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & 0<x\leqslant\pi. \end{cases}$

144. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\leqslant x<0, \\ x, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

145. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0, \\ -x, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

146. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & 1<x\leqslant\pi; \end{cases}$

a) sinusais; b) kosinusais.

147. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi; \end{cases}$

a) sinusais; b) kosinusais.

148. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x< \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi; \end{cases}$

a) sinusais; b) kosinusais.

149. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2\leqslant x<0, \\ 2, & 0\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$

150. $f(x)=5$, $0\leqslant x\leqslant 5$, sinusais.

Nubraižykite funkcijos $f(x)$ Furjė eilutės sumos grafiką:

151. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\leqslant x<0, \\ \pi-x, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

152. $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi\leqslant x<0, \\ 5, & x=0, \\ 2, & 0<x\leqslant\pi. \end{cases}$

153. $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ 0, & 0<x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant \pi. \end{cases}$ 154. $f(x)=\begin{cases} -2, & -4\leqslant x<-2, \\ 0, & x=-2, \\ 2, & -2<x\leqslant 0, \\ x, & 0<x\leqslant 4. \end{cases}$

155. $f(x)=\begin{cases} 2, & -5\leqslant x<-2, \\ 0, & x=-2, \\ -2, & -2<x\leqslant 0, \\ -x, & 0<x\leqslant 5. \end{cases}$

9.11. Atsakymai

1. $\frac{1}{3n+1}$. **2.** $\frac{n+2}{n(n+1)}$. **3.** $\frac{2n+3}{3n}$. **4.** $\frac{3n-1}{2^n}$. **5.** $\frac{n^2+3}{1000n+1}$. **6.** $\frac{3n+2}{n^2+5}$. **7.** $\frac{(-1)^{n+1}}{5n}$. **8.** $\frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$. **9.** $\frac{(-1)^{n+1}(3n-2)}{2^n+1}$. **10.** $\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{2^n+3}$.

16. Konverguoja, $S=\frac{1}{4}$. **17.** Diverguoja. **18.** Diverguoja. **19.** Konverguoja, $S=\frac{1}{45}$. **20.** Konverguoja, $S=\frac{1000}{11}$. **21.** Diverguoja. **22.** Konverguoja, $S=$ $=\frac{16}{3}$. **23.** Konverguoja, $S=-\frac{8}{3}$. **24.** Konverguoja, $S=2$. **25.** Diverguoja. **26.** Konverguoja. **27.** Diverguoja. **28.** Konverguoja. **29.** Konverguoja. **30.** Diverguoja. **31.** Konverguoja. **32.** Diverguoja. **33.** Konverguoja. **34.** Diverguoja. **35.** Konverguoja. **36.** Konverguoja. **37.** Diverguoja. **38.** Diverguoja. **39.** Konverguoja. **40.** Konverguoja. **41.** Diverguoja. **42.** Konverguoja. **43.** Konverguoja. **44.** Diverguoja. **45.** Diverguoja. **46.** Konverguoja. **47.** Konverguoja. **48.** Diverguoja. **49.** Konverguoja. **50.** Diverguoja. **51.** Konverguoja absoliučiai. **52.** Konverguoja reliatyviai. **53.** Konverguoja absoliučiai. **54.** Konverguoja absoliučiai. **55.** Konverguoja absoliučiai. **56.** Konverguoja absoliučiai. **57.** Diverguoja. **58.** Konverguoja reliatyviai. **59.** Diverguoja. **60.** Konverguoja reliatyviai.

61. 2. **62.** 8. **63.** 15. **64.** 4. **65.** 4. **66.** $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. **67.** $|x|>\frac{1}{2}$. **68.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **69.** $[-2, 2)$. **70.** $[-1, 1]$. **71.** $(-1, 1)$. **72.** $(-1, 1]$. **73.** R. **74.** $x=3$. **75.** $[-1, 3]$. **76.** $(0, 2)$. **77.** R. **78.** $[3{,}5, 4{,}5)$. **79.** $x=2$. **80.** $[5, 7]$. **81.** $(3, 5)$. **82.** $(2, 4)$. **83.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. **84.** $x=-5$. **85.** $[5, 9]$. **86.** $x=3$. **87.** R. **88.** $[-7, -1]$. **89.** $[-3, -1)$. **90.** $(-1, 1)$. **91.** $[-1, 1)$, $S(x)=-\ln(1-x)$. **92.** $[-2, 2)$, $S(x)=-2\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$. **93.** $(-1, 1)$, $S(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$. **94** $(-1, 1)$, $S(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$. **95.** $(-1, 1]$, $S(x)=\operatorname{arctg} x$. **96.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}((6(x-1))^n}{n}$.

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2(x+2))^n}{n}$.

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3(x+1))^n}{n}$.

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2(x-3))^n}{n}$.

100. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3(x+2))^n}{n}$.

101. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2(x+1)}{3}\right)^n$.

102. $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3(x-2)}{4}\right)^n$.

103. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3(x+1)}{2}\right)^n$.

104. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2(x+3)}{3}\right)^n$.

105. $-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2(x-2))^n$. **106.** $-7+10(x+1)-18(x+1)^2+26(x+1)^3-15(x+1)^4+3(x+1)^5$. **107.** $-5+24(x+1)-18(x+1)^2+4(x+1)^3$. **108.** $3(x-5)+(x-5)^2$. **109.** $5+10(x-1)+10(x-1)^2+5(x-1)^3+(x-1)^4$. **110.** $-126+76(x+4)-15(x+4)^2+(x+4)^3$. **111.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$. **112.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x(4x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

113. $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{n+1}$. **114.** $x\left(1+\frac{x^2}{3}-\frac{2}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\frac{2\cdot 5}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{4!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^4+\ldots\right)$.

115. $3-\left(\frac{x}{3}\right)^3-\frac{2}{2!3}\left(\frac{x}{3}\right)^6-\frac{2\cdot 5}{3!3^2}\left(\frac{x}{3}\right)^9-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{4!3^3}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}-\ldots$ **116.** 0,3679.

117. 2,115. **118.** 0,1823. **119.** 0,309. **120.** 0,7788. **121.** 0,337. **122.** 0,494. **123.** 0,3095. **124.** 0,406. **125.** 1,605. **126.** —945. **127.** $-\frac{24255}{128}$. **128.** $-\frac{3465}{4}$. **129.** 0. **130.** —240. **131.** Konverguoja. **132.** Konverguoja. **133.** Konverguoja. **134.** Diverguoja. **135.** Diverguoja. **136.** $|z|<1$. **137.** $|z|<5$. **138.** $|z|<1$. **139.** $|z|<1$. **140.** $|z|<\frac{1}{3}$. **141.** $-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right)+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right)$, $S(-\pi)=S(\pi)=-\frac{\pi}{2}$. **142.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $S(-\pi)=S(\pi)=S(0)=\frac{1}{2}$. **143.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $S(\pm\pi)=0$, $S(0)=0$. **144.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-2}{1}\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{\pi-2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\ldots\right)$, $S(\pm\pi)=\frac{\pi+1}{2}$, $S(0)=\frac{1}{2}$. **145.** $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$. **146.** a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n}\times$

$\times \sin nx$; b) $\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx$. **147.** a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$; b) $\frac{1}{2}+$ $+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$. **148.** a) $-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi-\cos 0{,}5n\pi}{n}\sin nx$; b) $\frac{1}{2}-$ $-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$. **149.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$.

150. $\frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}$.

10. DIFERENCIALINĖS LYGTYS

10.1. Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai

Tiriant gamtos reiškinius ir sudėtingus procesus, dažnai reikia spręsti lygtis, į kurias įeina kintamasis x, nežinomoji funkcija y ir šios funkcijos išvestinės:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0.$$

Tokias lygtis vadinsime *diferencialinėmis lygtimis.* Aukščiausią išvestinės, įeinančios į diferencialinę lygtį, eilę vadinsime *diferencialinės lygties eile.*

Pavyzdžiui, lygtis

$$y'-xy^2-x^3=0$$

yra pirmosios eilės diferencialinė lygtis, lygtis

$$y''-5y'+6y-e^x=0$$

— antrosios eilės, o lygtis

$$(x-1)y'''-y'-3x=0$$

— trečiosios eilės.

Bendruoju atveju pirmosios eilės diferencialinę lygtį užrašome šitaip:

$$F(x,\ y,\ y')=0.$$

Išsprendę (1) lygtį y' atžvilgiu, jei tai galima, gauname lygtį

$$y'=f(x,\ y). \qquad (2)$$

(2) lygtį vadinsime *pirmosios eilės diferencialine lygtimi, išspręsta y' atžvilgiu.*

Kartais vietoj (2) lygties nagrinėjama lygtis

$$dy-f(x, y)dx=0. \quad (3)$$

Funkciją $y=\varphi(x)$, $x\in(a, b)$, vadinsime (2) lygties sprendiniu, jeigu ji turi išvestinę $\varphi'(x)$ intervale (a, b) ir su visomis x reikšmėmis iš to intervalo teisinga lygybė

$$\varphi'(x)=f(x, \varphi(x)). \quad (4)$$

Panašiai galime apibrėžti ir (1) lygties sprendinį. Pavyzdžiui, funkcija $y=e^x$ yra diferencialinės lygties

$$y \ln y-xy'=0$$

sprendinys intervale $(-\infty, \infty)$, nes

$$e^x \cdot \ln e^x-xe^x=e^x \cdot x-xe^x=0.$$

Ši lygtis turi ir kitų sprendinių. Funkcijos $y=e^{Cx}$, C — konstanta, yra tos lygties sprendiniai, nes

$$e^{Cx} \ln e^{Cx}-x(e^{Cx})'=e^{Cx} \cdot Cx-x \cdot C \cdot e^{Cx}=0.$$

Imdami konkrečias C reikšmes, gausime skirtingus lygties sprendinius.

Paprasčiausia pirmosios eilės diferencialinė lygtis yra

$$y'=f(x). \quad (5)$$

Jos sprendinius gausime integruodami:

$$y=\int f(x)dx+C.$$

Taigi šiuo atveju sprendiniai priklauso nuo vienos konstantos. Imdami įvairias C reikšmes, gausime skirtingus sprendinius.

Pavyzdžiui, lygties

$$y'=3x^2$$

sprendiniai yra

$$y=x^3+C.$$

Jeigu pavyksta sudaryti formulę, pagal kurią gaunami visi duotosios diferencialinės lygties sprendiniai, tai sakoma, kad rastas tos *lygties bendrasis sprendinys.*

Vadinasi, (5) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=\int f(x)dx+C=\varphi(x)+C. \quad (6)$$

(1) ar (2) diferencialinės lygties bendrojo sprendinio priklausomybė nuo konstantos C gali būti sudėtingesnė negu (6) formulėje.

Funkciją $y=\varphi(x, C)$, kai imdami skirtingas konstantos C reikšmes gauname visus (1) ar (2) lygties sprendinius, vadinsime tos *lygties bendruoju sprendiniu.*

Suteikę konstantai C konkrečią skaitinę reikšmę, gauname *diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį.*

Pavyzdžiui, anksčiau nagrinėtos diferencialinės lygties

$$y \ln y - xy' = 0$$

bendrasis sprendinys yra

$$y = e^{Cx},$$

atskirieji sprendiniai —

$$y = 1 \quad (C=0), \quad y = e^{2x} \quad (C=2)$$

ir t. t.

Kituose skyreliuose nagrinėsime pavyzdžius, kuriuose bendrasis sprendinys užrašomas šitaip:

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{6}$$

Paprasčiausia n-osios eilės diferencialinė lygtis yra

$$y^{(n)} = f(x). \tag{7}$$

Šios lygties bendrasis sprendinys randamas n kartų integruojant. Todėl jis priklauso nuo n konstantų C_1, C_2, C_3, ..., C_n.

Pavyzdžiui, lygtį

$$y'' = \cos 2x$$

du kartus suintegravę, gauname bendrąjį sprendinį:

$$y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2,$$

kuris priklauso nuo dviejų konstantų. Iš jo, imdami skirtingas C_1 ir C_2 reikšmes, gauname atskiruosius sprendinius

$$y = -\frac{1}{4} \cos 2x \quad (C_1 = C_2 = 0), \quad y = -\frac{1}{4} \cos 2x - 3x \quad (C_1 = -3, \ C_2 = 0)$$

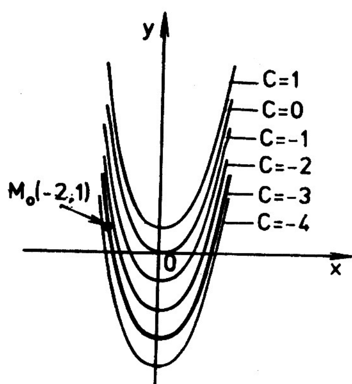
ir t. t.

Apskritai n-osios eilės diferencialinės lygties sprendinys priklauso nuo n konstantų.

Praktikoje dažnai reikia rasti ne bendrąjį, o atskirąjį diferencialinės lygties sprendinį, tenkinantį papildomas uždavinio sąlygas. Kai diferencialinė lygtis yra pirmosios eilės, tai papildomos sąlygos, vadinamos *pradinėmis sąlygomis,* užrašomos šitaip: reikia rasti tokį atskirąjį sprendinį $y = \varphi(x)$, kurio reikšmė būtų lygi y_0, kai $x = x_0$, t. y.

$$\varphi(x_0) = y_0; \tag{8}$$

čia x_0 ir y_0 — duotieji skaičiai.



175 pav.

Kiekvieno atskirojo sprendinio grafikas yra kreivė, vadinama *integraline kreive*. Todėl bendrasis sprendinys geometriškai vaizduojamas integralinių kreivių šeima. Jei diferencialinė lygtis yra pirmosios eilės, tai kreivių šeima priklauso nuo vieno parametro.

175 paveiksle pavaizduota diferencialinės lygties $y'=2x$ integralinių kreivių šeima $y=x^2+C$ ir išskirtas atskirasis sprendinys $y=x^2-3$, tenkinantis pradines sąlygas $y_0=1$, kai $x_0=-2$.

Jeigu diferencialinė lygtis yra antrosios eilės, tai pradinės sąlygos užrašomos šitaip: reikia rasti tokį sprendinį $y=\varphi(x)$, kad būtų

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y'_0 \tag{9}$$

Atkreipsime dėmesį, kad pradinių sąlygų turi būti tiek, kokia yra diferencialinės lygties eilė.

Pavyzdžiai. 1. Rasime diferencialinės lygties

$$y'=\frac{1-x^2}{x^4}$$

bendrąjį sprendinį.

Integruodami šią lygtį, gauname:

$$y=\int\frac{1-x^2}{x^4}dx=\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+C.$$

2. Rasime lygties

$$y'=\frac{5}{\cos^2 t}$$

atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Šios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=\int\frac{5dt}{\cos^2 t}=5\operatorname{tg} t+C.$$

Konstantos C reikšmę rasime pareikalavę, kad galiotų lygybė $5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+C=2$, t. y. kad C reikšmė būtų lygi -3.

Taigi šios lygties atskirasis sprendinys, tenkinantis nurodytas pradines sąlygas, yra

$$y=5\operatorname{tg} t-3.$$

10.2. Pirmosios eilės diferencialinės lygtys su atskiriamais kintamaisiais

Diferencialinę lygtį

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0 \tag{1}$$

vadinsime *lygtimi su atskirtais kintamaisiais.*

Ją suintegravę panariui, gauname bendrąjį sprendinį

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C. \tag{2}$$

Pavyzdžiai. 1. Rasime diferencialinės lygties

$$xdx+(y+1)\,dy=0$$

bendrąjį sprendinį.

Šią lygtį suintegravę panariui, gauname

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+y=C.$$

2. Rasime diferencialinės lygties

$$(2x-2)\,dx+2ydy=0$$

integralinę kreivę, einančią per tašką (0, 1).

Suintegravę panariui, gauname

$$x^2-2x+y^2=C, \text{ arba } (x-1)^2+y^2=(\sqrt{C+1})^2.$$

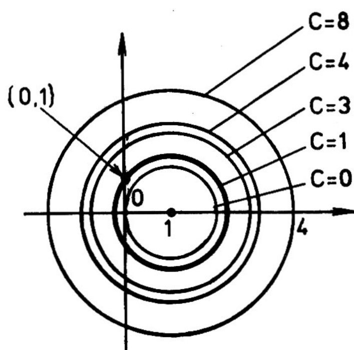
Tai koncentrinių apskritimų, kurių centras taške (1, 0), o spinduliai $\sqrt{C+1}$, šeima (176 pav.). Iš šios šeimos išskiriame vieną apskritimą, einantį per tašką (0, 1).

Kai $x=0$, $y=1$, iš bendrojo sprendinio randame C reikšmę:

$$C=0^2-2\cdot 0+1^2=1.$$

Vadinasi, ieškomos integralinės kreivės lygtis yra

$$x^2-2x+y^2=1, \text{ arba } (x-1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2.$$



176 pav.

Diferencialinę lygtį

$$P(x)\,Q(y)\,dx+P_1(x)\,Q_1(y)\,dy=0 \tag{3}$$

vadinsime *lygtimi su atskiriamais kintamaisiais.*

Šią lygtį padaliję iš $P_1(x)\,Q(y)\neq 0$, gauname lygtį su atskirtais kintamaisiais:

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}dx+\frac{Q_1(x)}{Q(y)}dy=0. \tag{4}$$

(4) lygties, kartu ir (3) lygties bendrasis sprendinys yra

$$\int\frac{P(x)}{P_1(x)}dx+\int\frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy=C. \tag{5}$$

Tačiau (3) lygties sprendiniai gali būti ir tiesės $x=a$, kai $P_1(a)=0$, bei tiesės $y=b$, kai $Q(b)=0$.

Pavyzdžiai. 3. Išspręsime diferencialinę lygtį $y'=\frac{y-1}{x+1}$.

Lygtį pertvarkome šitaip:

$$\frac{dy}{y-1}=\frac{dx}{x+1},$$

jei tik $y-1\neq 0$.

Iš pastarosios lygties, ją integruodami panariui, gauname bendrąjį sprendinį:

$$\ln|y-1|=\ln|x+1|+\ln|C|=\ln|C(x+1)|;$$

Iš čia

$$y-1=C(x+1),\ C\neq 0.$$

Tačiau $y=1$ yra duotosios lygties sprendinys. Jį galima gauti iš sprendinio $y=1+C(x+1)$ imant $C=0$. Taigi funkcija $y=1+$ $+C(x+1)$, kurioje gali būti ir $C=0$, yra lygties bendrasis sprendinys.

4. Išspręsime diferencialinę lygtį

$$dy - xy^2 dx = 0.$$

Abi lygties puses padaliję iš $y^2 (y^2 \neq 0)$, atskiriame kintamuosius:

$$\frac{dy}{y^2} = x dx.$$

Suintegravę gauname

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Iš čia

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

Tai lygties bendrasis sprendinys. Aišku, kad $y=0$ irgi yra nagrinėjamosios lygties sprendinys.

5. Išspręsime lygtį

$$(y^2 + xy^2) dx + (x^2 - yx^2) dy = 0.$$

Lygtį padaliję iš $x^2 y^2$ $(x \cdot y \neq 0)$, atskiriame kintamuosius:

$$\frac{1+x}{x^2} dx + \frac{1-y}{y^2} dy = 0,$$

integruojame panariui

$$-\frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{y} - \ln|y| = C.$$

Iš čia

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Tai ir yra duotosios lygties bendrasis sprendinys.

Iš bendrojo sprendinio formulės y negalime rasti. Pažymėsime, kad lygties sprendiniai yra tiesės $x=0$, $y=0$.

6. Į kambarį, kurio temperatūra 20°C, įneštas 100°C temperatūros kūnas. Per 20 min. jis ataušta iki 60°C. Rasime kūno aušimo dėsnį ir laiką, per kurį kūnas atauš iki 30°C.

Sakykime, T — kūno temperatūra laiko momentu t, T_0 — aplinkos temperatūra ($T_0 = 20°$). Pagal Niutono dėsnį (kūno aušimo greitis proporcingas temperatūrų skirtumui):

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0);$$

čia k — proporcingumo daugiklis. Iš čia

$$\frac{dT}{T - T_0} = k dt \quad (T - T_0 \neq 0)$$

ir

$$\ln|T-T_0|=kt+\ln C,$$

t. y.

$$T-T_0=Ce^{kt}.$$

Naudosimės uždavinio papildomomis sąlygomis C ir k reikšmėms rasti. Kai $t=0$, $T=100°$, todėl

$$100-20=C\cdot e^{k\cdot 0},$$

t. y. $C=80$.

Jeigu $t=20$ min, tai $T=60°$, todėl

$$60-20=80e^{20k}.$$

Iš čia

$$e^{20k}=\frac{1}{2}, \text{ arba } k=-\frac{\ln 2}{20}.$$

Taigi kūno aušimo dėsnis yra

$$T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Kai $T=30°$,

$$30=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}, \text{ arba } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{1}{8}.$$

Iš čia

$$\frac{t}{20}=3,$$

t. y. $t=60$ min.

Vadinasi, kūnas atauš iki 30°C temperatūros per 60 min.

7. Laivas išjungtu varikliu, veikiamas pasipriešinimo jėgos, kuri proporcinga laivo greičiui, sulėtina judėjimą. Pradinis laivo greitis yra $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$, o po 5 s — jau tik $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Rasime, per kiek laiko laivo greitis sumažės iki $1\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sakykime, laiko momentu t laivo greitis yra v. Pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$m\frac{dv}{dt}=kv$$

$\left(\text{čia } m \text{ — laivo masė, } a=\frac{dv}{dt}\right)$, arba

$$\frac{dv}{dt}=bv$$

$\left(\text{čia } b=\frac{k}{m}\right)$.

Atskyrę kintamuosius ir suintegravę, gauname

$$\ln v = bt + \ln C \quad (v \neq 0).$$

Iš čia

$$v = Ce^{bt}.$$

Remdamiesi papildomomis uždavinio sąlygomis, apskaičiuosime C ir b reikšmes.

Kai $t=0$, $v=10$, todėl $10=Ce^{0b}$, t. y. $C=10$.

Kai $t=5$, $v=8$, todėl $8=10e^{5b}$. Iš čia $b=\frac{1}{5}\ln 0{,}8$.

Taigi laivo greičio kitimas aprašomas formule

$$v = 10e^{\frac{t}{5}\ln 0{,}8}.$$

Iš šios formulės, kai $v=1$, gauname

$$1 = 10e^{0{,}2\ln 0{,}8\cdot t}.$$

Išlogaritmavę šią lygybę, turime:

$$0{,}2\ln 0{,}8\cdot t = \ln 0{,}1.$$

Iš čia

$$t = \frac{5\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx \frac{-11{,}513}{-0{,}223} \approx 51{,}59 \text{ s}.$$

8. 30 l talpos indas pripildytas oro (80% azoto ir 20% deguonies). Į indą per 1 s įteka 0,2 l azoto, kuris tuojau pat susimaišo su oru. Iš indo per 1 s išteka toks pat kiekis mišinio. Rasime, per kiek laiko inde bus 90% azoto.

Sakykime, laiko momentu t inde yra y l azoto. Apskaičiuosime, kaip pasikeis azoto kiekis inde per laiko tarpą dt. Jeigu per 1 s į indą įteka 0,2 l azoto, tai per dt sekundžių į indą įteka $0{,}2dt$ l azoto. Per tą patį laiką iš indo išteka $0{,}2dt$ l mišinio. Kadangi 30 l mišinio yra y l azoto, tai 1 l mišinio yra $\frac{y}{30}$ l azoto, o $0{,}2dt$ l mišinio — $\frac{0{,}2y}{30}dt$ l azoto. Iš šių duomenų sudarome diferencialinę lygtį:

$$dy = 0{,}2dt - \frac{0{,}2y}{30}dt \quad \text{(radome azoto pokytį!)},$$

arba

$$150dy = (30-y)\,dt.$$

Atskyrę kintamuosius, turime:

$$\frac{dy}{30-y} = \frac{dt}{150} \quad (30-y \neq 0).$$

Suintegravę šią lygtį, gauname

$$-\ln|30-y|=\frac{t}{150}+\ln C,$$

t. y.

$$30-y=Ce^{-\frac{t}{150}}.$$

Pagal uždavinio sąlygą inde yra 80%, t. y. $30\cdot\frac{80}{100}=24$ l azoto, kai $t=0$, todėl $30-24=Ce^0$, $C=6$.

Vadinasi, azoto kiekis inde keičiasi pagal dėsnį

$$30-y=6e^{-\frac{t}{150}}.$$

Apskaičiuosime laiką, kai inde bus 90% azoto, t. y. $30\cdot\frac{90}{100}=$ $=27$ l:

$$30-27=6e^{-\frac{t}{150}},$$

arba

$$e^{-\frac{t}{150}}=\frac{1}{2}.$$

Išlogaritmavę šią lygybę, gauname

$$-\frac{t}{150}=-\ln 2.$$

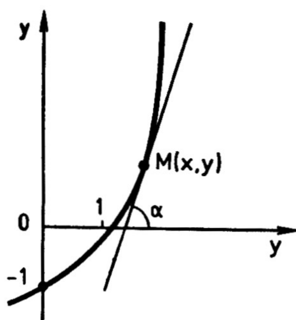
Iš čia

$$t=150\ln 2=150\cdot 0{,}69=103 \text{ s}\approx 1{,}7 \text{ min}.$$

9. Rasime kreivę, kuri eina per tašką $(0, -1)$ ir kurios liestinės kiekviename lietimosi taške krypties koeficientas lygus to taško ordinatei, padidintai 3 vienetais.

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha=y'$ (177 pav.), tai

$$y'=y+3,$$



177 pav.

arba

$$\frac{dy}{y+3}=dx \quad (y+3\neq 0).$$

Iš čia

$$\ln|y+3|=x+C.$$

Pasinaudoję pradinėmis sąlygomis $y(0)=-1$, randame C reikšmę:

$$\ln|-1+3|=0+C; \quad C=\ln 2.$$

Taigi ieškomosios kreivės lygtis yra

$$\ln|y+3|=x+\ln 2, \text{ arba } y=2e^x-3.$$

10.3. Pirmosios eilės homogeninės diferencialinės lygtys

Funkcija $g(x, y)$ vadinama *k-ojo laipsnio homogenine funkcija,* jeigu lygybė

$$g(tx, ty)=t^k g(x, y)$$

teisinga su visomis $t>0$ reikšmėmis, kai k — bet koks realusis skaičius.

Pavyzdžiui, funkcija $g(x, y)=5x^2-4xy$ yra 2-ojo laipsnio homogeninė funkcija, nes

$$g(tx, ty)=5(tx)^2-4(xt)(ty)=t^2(5x^2-4xy)=t^2 g(x, y).$$

Analogiškai galima įsitikinti, kad funkcijos

$$f(x, y)=\frac{x^3+x^2y}{x^2+y^2}, \quad h(x, y)=\frac{4x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$$

atitinkamai yra pirmojo ir nulinio laipsnio homogeninės funkcijos.

Diferencialinę lygtį

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0, \tag{1}$$

$M(x, y)$ ir $N(x, y)$ — vienodo laipsnio homogeninės funkcijos, vadinsime *pirmosios eilės homogenine diferencialine lygtimi.*

Atlikus keitinį $y=zx$, z — nauja nežinoma funkcija, iš (1) lygties gaunama lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$(x+2y)dx-xdy=0.$$

$M(x, y)=x+2y$ ir $N(x, y)=-x$ yra pirmojo laipsnio homogeninės funkcijos, todėl atlikę keitinį

$$y=zx, \quad dy=zdx+xdz,$$

gauname

$$(x+2xz)dx-x(zdx+xdz)=0,$$

arba

$$x(1+z)dx-x^2dz=0.$$

Atskyrę kintamuosius (padaliję iš $(1+z)\cdot x^2\neq 0$) ir suintegravę gauname:

$$\int\frac{dz}{1+z}=\int\frac{dx}{x},$$

arba

$$\ln|1+z|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Iš čia

$$1+z=Cx\quad(C\neq 0).$$

Kadangi $z=\frac{y}{x}$, tai lygties bendrasis sprendinys yra

$$1+\frac{y}{x}=Cx,$$

arba

$$x+y=Cx^2.$$

Spręsdami lygtį laikėme $1+z\neq 0$, t. y. $1+\frac{y}{x}\neq 0$. Jeigu $1+z=0$, tai ir $1+\frac{y}{x}=0$, arba $y=-x$. Nesunku patikrinti, kad $y=-x$ yra nagrinėjamosios lygties sprendinys (jį galima gauti iš bendrojo sprendinio, kai $C=0$).

2. Išspręsime lygtį

$$x^2y'+y^2+xy+x^2=0.$$

x^2 ir y^2+xy+x^2 yra antrojo laipsnio homogeninės funkcijos, todėl atliekame keitinį

$$y=zx,\ y'=xz'+z:$$
$$x^2(xz'+z)+x^2(z^2+z+1)=0,$$
$$xz'=-(z+1)^2.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$-\frac{dz}{(z+1)^2}=\frac{dx}{x}\quad(z+1\neq 0),$$

integruojame panariui:

$$\frac{1}{z+1}=\ln|Cx|.$$

Iš čia

$$\frac{x}{x+y}=\ln|Cx|,\quad\text{arba}\quad y=x\left(\frac{1}{\ln Cx}-1\right).$$

Gavome nagrinėjamosios lygties bendrąjį sprendinį.

Jeigu $z+1=0$, tai $y=-x$ irgi yra duotosios lygties sprendinys.

10.4. Pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygtys. Bernulio* lygtis

Lygtį

$$y'+p(x)y=q(x),\tag{1}$$

$p(x)$ ir $q(x)$ — tolydžios intervale $(a,\ b)$ funkcijos, vadinsime *tiesine pirmosios eilės diferencialine lygtimi.*

* Daniel Bernoulli (1700—1783) — šveicarų matematikas.

Ieškosime specialaus pavidalo (1) lygties sprendinio

$$y=u\cdot v;$$

čia $u(x)$ — nauja ieškomoji funkcija, $v(x)$ — tam tikra specialiai parinkta funkcija. Radę funkcijos $y=u\cdot v$ išvestinę

$$y'=u'\cdot v+u\cdot v',$$

įrašome šias y ir y' išraiškas į (1) lygtį:

$$vu'+(v'+p(x)v)u=q(x).$$

Funkciją $v(x)$ taip pasirenkame, kad (2) lygtyje koeficientas prie u būtų lygus nuliui, t. y.

$$v'+p(x)v=0. \qquad (3)$$

Tada (2) lygtis yra šitokia:

$$vu'=q(x). \qquad (4)$$

(3) ir (4) yra lygtys su atskiriamais kintamaisiais. Iš (3) lygties randame $v(x)$, imdami kokį nors šios lygties atskirąjį sprendinį. Žinodami $v(x)$, iš (4) lygties randame $u(x)$ bendrąjį sprendinį, kartu ir (1) lygties bendrąjį sprendinį $y=u(x)v(x)$.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$y'+2xy=2xe^{-x^2}.$$

Sakykime, kad $y=u\cdot v$. Į lygtį įrašę $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$, gauname

$$v\cdot u'+u(v'+2xv)=2xe^{-x^2}. \qquad (5)$$

Ieškosime tokios funkcijos $v(x)$, kad būtų

$$v'+2xv=0,$$

arba

$$\frac{dv}{dx}=-2xv.$$

Iš čia

$$\frac{dv}{v}=-2xdx$$

($v\neq0$, nes $y=0$ nėra lygties sprendinys). Integruodami gauname

$$\ln|v|=-x^2$$

(apsiribojome atskiruoju sprendiniu, kai $C=0$), arba

$$v=e^{-x^2}.$$

Iš (5) lygties

$$e^{-x^2}\cdot u'=2xe^{-x^2},$$

arba

$$\frac{du}{dx}=2x.$$

Vadinasi,

$$u=\int 2xdx=x^2+C$$

ir

$$y=u\cdot v=e^{-x^2}\cdot(x^2+C)$$

yra duotosios lygties bendrasis sprendinys.

2. Rasime lygties

$$y'-\operatorname{tg} x\cdot y=\cos x$$

sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=3$.

Atlikę keitinį

$$y=u\cdot v,\ y'=u'\cdot v+u\cdot v',$$

gauname

$$v\cdot u'+u(v'-\operatorname{tg} x\cdot v)=\cos x. \tag{6}$$

Jeigu

$$v'-\operatorname{tg} x\cdot v=0,$$

tai

$$\frac{dv}{v}=\operatorname{tg} xdx.$$

Suintegravę gauname

$$\ln|v|=-\ln|\cos x|,$$

arba

$$v=\frac{1}{\cos x}.$$

Iš (6) lygties

$$\frac{1}{\cos x}\cdot u'=\cos x,$$

arba

$$du=\cos^2 xdx.$$

Suintegravę šią lygtį, gauname

$$u=\int\cos^2 xdx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Vadinasi, duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\right)\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Konstantos C reikšmę rasime iš pradinių sąlygų. Kai $x=0$, $y=3$:

$$3=\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}\sin(2\cdot 0)+C\right)\cdot\frac{1}{\cos 0};\ C=3.$$

Taigi sprendinys $y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+3\right)\cdot\frac{1}{\cos x}$ tenkina pradines sąlygas $y(0)=3$.

Lygtį

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^{\alpha}, \tag{7}$$

$\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$, vadinsime *Bernulio lygtimi.* Ji sprendžiama panašiai kaip ir tiesinė lygtis. Jei $\alpha>0$, Bernulio lygtis turi sprendinį $y=0$.

Pavyzdžiai. 3. Išspręsime lygtį

$$y'+2y=y^2e^x \quad (a=2).$$

Po keitinio

$$y=u\cdot v,\ y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

gauname

$$v\cdot u'+u(v'+2v)=u^2v^2e^x. \tag{8}$$

Iš lygties

$$v'+2v=0,$$

arba

$$\frac{dv}{v}=-2dx$$

randame

$$v=e^{-2x}.$$

Rastąją v išraišką įrašę į (8) lygtį, gauname

$$e^{-2x}u'=u^2e^{-4x}\cdot e^x,$$

arba

$$\frac{du}{u^2}=e^{-x}dx.$$

Iš čia suintegravę gauname

$$-\frac{1}{u}=-e^{-x}+C,$$

arba

$$u=\frac{1}{e^{-x}-C}=\frac{e^x}{1-Ce^x}.$$

Taigi duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=\frac{e^{-2x}e^x}{1-Ce^x}=\frac{e^{-x}}{1-Ce^x}=\frac{1}{e^x-Ce^{2x}}.$$

Be to, $y=0$ irgi yra sprendinys.

4. Išspręsime lygtį

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y} \quad (\alpha=-1).$$

Iš šios lygties po keitinio

$$y=u\cdot v,\ y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

gauname

$$v\cdot u'+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{x^2}{u\cdot v}. \qquad (9)$$

Iš lygties

$$v'-\frac{v}{x}=0$$

randame

$$v=x.$$

Įrašę rastąją v išraišką į (9) lygtį, gauname

$$xu'=\frac{x^2}{u\cdot x},$$

arba

$$udu=dx.$$

Vadinasi,

$$\frac{u^2}{2}=x+C.$$

Iš čia

$$u=\sqrt{2(x+C)},$$

ir

$$y=x\sqrt{2(x+C)}$$

yra nagrinėjamosios lygties bendrasis sprendinys.

10.5. Antrosios eilės diferencialinės lygtys

Nagrinėsime antrosios eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, y, y', y'')=0 \qquad (1)$$

arba lygtį, išspręstą antrosios y išvestinės atžvilgiu,

$$y''=f(x, y, y'). \qquad (2)$$

Kaip buvo minėta 10.1 skyrelyje, šių lygčių bendrieji sprendiniai priklauso nuo dviejų konstantų ir juos galime užrašyti šitaip:

$$y=\varphi(x, C_1, C_2), \qquad (3)$$

arba

$$\Phi(x, y, C_1, C_2)=0. \qquad (4)$$

Norint iš bendrojo sprendinio gauti atskirąjį sprendinį, reikia žinoti pradines sąlygas (10.1 skyrelio (9) formulės).

Šiame skyrelyje nagrinėsime tik paprasčiausias antrosios eilės diferencialines lygtis.

1. **Lygtis $y''=f(x)$** sprendžiama du kartus ją paeiliui integruojant.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsime lygtį

$$y''=\sqrt{x}.$$

Integruodami šią lygtį du kartus, gauname:

$$y'=\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1\right)dx=\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2.$$

2. Rasime lygties $y''=6x$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=3$, $y'(0)=5$.

Suintegravę gauname:

$$y'=3x^2+C_1.$$

Pasinaudoję antrąja pradine sąlyga, apskaičiuojame C_1:

$$y'(0)=3\cdot 0^2+C_1=5,\ C_1=5.$$

Suintegravę lygtį $y'=3x^2+5$, gauname

$$y=x^3+5x+C_2.$$

Iš sąlygos $y(0)=3$ randame C_2:

$$3=0^3+5\cdot 0+C_2,\ C_2=3.$$

Vadinasi, duotosios lygties atskirasis sprendinys yra

$$y=x^3+5x+3.$$

2. **Lygtis $F(x, y', y'')=0$** (šioje lygtyje nėra funkcijos y), pasinaudojus keitiniu $y'=p(x)$, $y''=p'$, pertvarkoma į pirmosios eilės diferencialinę lygtį

$$F(x, p, p')=0.$$

3 **pavyzdys.** Išspręsime lygtį

$$y''=\frac{2y'}{x}.$$

Sakykime, $y'=p$. Tada $y''=p'$ ir duotąją lygtį galime užrašyti šitaip:

$$p'=\frac{2p}{x},$$

arba

$$\frac{dp}{p}=2\frac{dx}{x}.$$

Iš čia

$$\ln|p|=2\ln|x|+\ln|C_1|,$$

$$p=\frac{dy}{dx}=C_1x^2.$$

Atskyrę kintamuosius ir suintegravę, gauname

$$y=\frac{C_1x^3}{3}+C_2.$$

3. **Lygtis $F(y, y', y'')=0$,** atlikus keitinį $y'=p(y)$, irgi pertvarkoma į pirmosios eilės diferencialinę lygtį. Tačiau šioje lygtyje nėra kintamojo x, todėl kintamuoju laikysime y. Tada

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p.$$

Taigi duotoji lygtis pakeičiama lygtimi

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

4 pavyzdys. Rasime lygties $3y'y''=2y$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas: $y(0)=y'(0)=1$.

Atlikę keitinį $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dy}p$, lygtį perrašome šitaip:

$$3p^2\frac{dp}{dy}=2y.$$

Iš čia suintegravę gauname

$$p^3=y^2+C_1,$$

arba

$$(y')^3=y^2+C_1. \qquad (5)$$

Iš antrosios pradinės sąlygos randame C_1:

$$1^3=1^2+C_1, \quad C_1=0.$$

Į (5) lygtį įrašę rastąją C_1 reikšmę, turime

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}.$$

Šioje lygtyje atskyrę kintamuosius ir suintegravę, gauname

$$3\sqrt[3]{y}=x+C_2,$$

arba

$$y=\left(\frac{x+C_2}{3}\right)^3.$$

Iš pirmosios pradinės sąlygos randame C_2:

$$1=\left(\frac{0+C_2}{3}\right)^3, \quad C_2=3.$$

Ieškomasis sprendinys yra

$$y=\left(\frac{x+3}{3}\right)^3.$$

10.6. Antrosios eilės tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Iš diferencialinių lygčių ypač svarbios tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais.

Diferencialinė lygtis

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{1}$$

(p, $q\in R$, o $f(x)$ — funkcija, apibrėžta intervale (a, b)) vadinama *antrosios eilės tiesine diferencialine lygtimi su pastoviais koeficientais.*

Kai $f(x)=0$, lygtis

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

vadinama *antrosios eilės homogenine tiesine diferencialine lygtimi su pastoviais koeficientais.*

Iš pradžių nagrinėsime homogeninės lygties sprendimą, po to bendrosios lygties sprendimą.

10.6.1. Lygties $y''+py'+qy=0$ sprendimas

Teorema. *Jeigu* $y_1(x)$ *ir* $y_2(x)$ *yra* (2) *lygties sprendiniai, tai*

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),\ C_1,\ C_2\in R,$$

taip pat yra tos lygties sprendinys.

Įrodymas. Iš tikrųjų, jei

$$y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)=0, \tag{3}$$
$$y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)=0, \tag{4}$$

tai (3) lygtį padauginę iš C_1, o (4) — iš C_2 ir jas sudėję, gauname:

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+p(C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x))+$$
$$+q(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))=0,$$

t. y.

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=0.$$

Sakysime, kad du (2) lygties sprendiniai $y_1(x)$ ir $y_2(x)$ sudaro *fundamentaliąją sprendinių sistemą,* jeigu su visais $x\in(a, b)$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Determinantas $W(x)$ vadinamas *Vronskio * determinantu.*

Pavyzdžiui, lygties

$$y''-5y'+6y=0$$

* Wronski Jozef Maria (1776—1853) — lenkų matematikas.

sprendiniai yra funkcijos $y_1=e^{2x}$ ir $y_2=e^{3x}$ (patikrinkite!). Šie sprendiniai sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą, nes

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=e^{5x}\neq 0.$$

Platesniame aukštosios matematikos kurse įrodoma teorema apie bendrojo sprendinio struktūrą.

Teorema. *Jeigu* (2) *lygties du sprendiniai* y_1 *ir* y_2 *sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai šios lygties bendrasis sprendinys yra*

$$y=C_1y_1+C_2y_2; \qquad (5)$$

čia C_1, C_2 *— konstantos.*

Taigi, norint rasti (2) lygties bendrąjį sprendinį, reikia rasti jos fundamentaliąją sprendinių sistemą.

Nagrinėsime funkciją $y=e^{\lambda x}$, $\lambda\in R$, ir ieškosime tokių λ reikšmių, su kuriomis ši funkcija yra (2) lygties atskirasis sprendinys. Įrašę y, $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ išraiškas į (2) lygtį, gauname

$$e^{x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0,$$

arba

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \qquad (6)$$

Vadinasi, funkcija $y=e^{\lambda x}$ yra (2) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai λ tenkina (6) lygtį. (6) lygtis vadinama (2) lygties *charakteristine lygtimi.* Ją formaliai galime gauti iš (2) lygties y'', y', y pakeitę atitinkamai λ^2, λ, λ^0.

Pavyzdžiui, lygties $2y''-3y'-y=0$ charakteristinė lygtis yra $2\lambda^2-3\lambda-1=0$.

Sprendžiant (6) lygtį, galimi trys atvejai.

1 atvejis. Charakteristinės lygties šaknys yra realios ir skirtingos:

$$\lambda_1\neq\lambda_2.$$

Tada (2) lygties atskirieji sprendiniai $y_1=e^{\lambda_1x}$ ir $y_2=e^{\lambda_2x}$ sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą.

Iš tikrųjų

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & e^{\lambda_2x} \\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \lambda_2e^{\lambda_2x} \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_1x}e^{\lambda_2x}\neq 0.$$

Todėl (2) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}. \qquad (7)$$

1 pavyzdys. Rasime lygties $y''-5y'+4y=0$ sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

Išsprendę charakteristinę lygtį

$$\lambda^2-5\lambda+4=0,$$

gauname $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$. Taigi duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^x+C_2e^{4x}.$$

Išdiferencijavę bendrąjį sprendinį ir pasinaudoję pradinėmis sąlygomis, sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1e^0+C_2e^{4\cdot 0}=3, \\ C_1e^0+4C_2e^{4\cdot 0}=0, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} C_1+C_2=3, \\ C_1+4C_2=0. \end{cases}$$

Iš čia $C_1=4$, $C_2=-1$.

Atskirasis sprendinys yra $y=4e^x-e^{4x}$.

2 atvejis. (6) lygties šaknys yra realios ir lygios:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda.$$

Šiuo atveju tegalime rasti vieną atskirąjį sprendinį

$$y_1=e^{\lambda x}.$$

Įsitikinsime, kad funkcija $y_2=xy_1=xe^{\lambda x}$ irgi yra (2) lygties sprendinys. Iš tikrųjų

$$y_2'=e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x},\quad y_2''=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}$$

ir

$$y_2''+py_2'+qy_2=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}+p\,(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x})+qxe^{\lambda x}.$$

Pastebėję, kad $p=-2\lambda$, $q=\lambda^2$ (Vieto teorema!), gauname

$$y_2''+py_2'+qy_2=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}-2\lambda\,(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x})+\lambda^2xe^{\lambda x}=0.$$

Be to, sprendiniai $y_1=e^{\lambda x}$ ir $y_2=xe^{\lambda x}$ sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x} \end{vmatrix}=e^{2\lambda x}\neq 0.$$

Šiuo atveju (2) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}. \tag{8}$$

3 atvejis. Charakteringosios lygties šaknys yra kompleksinės:

$$\lambda_1=a+ib,\ \lambda_2=a-ib.$$

(2) lygties atskiruosius sprendinius y_1 ir y_2, remdamiesi Oilerio formule (9.8 skyrelio (10) formulė), galime užrašyti šitaip:

$$y_1=e^{(a+ib)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),$$
$$y_2=e^{(a-ib)x}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Nesunku įsitikinti, kad ir funkcijos $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ yra (2) lygties atskirieji sprendiniai, sudarantys fundamentaliąją sprendinių sistemą (patikrinkite). Todėl (2) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx. \tag{9}$$

2 pavyzdys. Lygties $y'' + 2y' + 10y = 0$ charakteristinės lygties $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ šaknys yra $\lambda_1 = -1 + 3i$, $\lambda_2 = -1 - 3i$, todėl

$$y = C_1 e^{-x}\cos 3x + C_2 e^{-x}\sin 3x.$$

10.6.2. Lygties $y'' + py' + qy = f(x)$ sprendimas. Spręsime remdamiesi šia teorema.

Jeigu (2) *lygties bendrasis sprendinys yra* Y, *o* (1) *lygties atskirasis sprendinys* — y_1, *tai* (1) *lygties bendrasis sprendinys yra*

$$y = Y + y_1.$$

Teoremos neįrodinėsime.

Kartais (1) lygties atskirąjį sprendinį pavyksta atspėti, kartais jis randamas gana sunkiai. Nagrinėsime tik tam tikrų tipų funkcijas $f(x)$.

1. Sakykime, kad

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x); \tag{10}$$

čia $\alpha \in R$, o $P_n(x)$ — n-ojo laipsnio daugianaris. Kai $\alpha = 0$, $f(x) = P_n(x)$.

Galima įrodyti, kad šiuo atveju reikia ieškoti šitokio (1) lygties sprendinio y_1:

a) jeigu α nesutampa su nė viena charakteristinės lygties šaknimi, tai

$$y_1 = e^{\alpha x} Q_n(x), \tag{11}$$

$Q_n(x)$ — tokio pat laipsnio kaip ir $P_n(x)$ daugianaris su nežinomais koeficientais;

b) jeigu α sutampa su viena charakteristinės lygties šaknimi, tai

$$y_1 = x e^{\alpha x} Q_n(x); \tag{12}$$

c) jeigu α sutampa su charakteristinės lygties kartotine šaknimi, tai

$$y_1 = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x). \tag{13}$$

Iš pavyzdžių paaiškės, kaip reikia ieškoti daugianario $Q_n(x)$ nežinomų koeficientų.

Pavyzdžiai. 1. Rasime lygties $y''+y=4xe^x$ bendrąjį sprendinį. Šiuo atveju

$$P_1(x)=4x, \ \alpha=1.$$

Homogeninės lygties

$$y''+y=0$$

charakteristinės lygties

$$\lambda^2+1=0$$

šaknys yra $\lambda_1=i$ ir $\lambda_2=-i$, todėl jos bendrasis sprendinys yra

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Kadangi $\alpha=1$ nėra charakteristinės lygties šaknis, tai ieškosime duotosios lygties atskirojo sprendinio šio pavidalo:

$$y_1=Q_1(x)e^x=(Ax+B)e^x.$$

Šiuo atveju $y_1'=Ae^x+(Ax+B)e^x$, $y_1''=2Ae^x+(Ax+B)e^x$. Įrašę y_1, y_1' ir y_1'' išraiškas į duotąją lygtį, gauname

$$2Ae^x+2(Ax+B)e^x=4xe^x,$$

arba

$$2Ax+2A+2B=4x.$$

Sulyginę koeficientus prie atitinkamų x laipsnių, gauname sistemą

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} 2A+2B=0, \\ 2A=4. \end{array}\right. \\ x^1 & \end{array}$$

Iš čia randame A ir B:

$$A=2, \ B=-2.$$

Vadinasi, duotosios lygties atskirasis sprendinys yra

$$y_1=(2x-2)e^x,$$

o jos bendrasis sprendinys —

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x.$$

2. Rasime lygties

$$y''+2y'-3y=6x$$

bendrąjį sprendinį. Šiame pavyzdyje $P_1(x)=6x$, $\alpha=0$.

Homogeninės lygties

$$y''+2y'-3y=0$$

bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$$

Kadangi $\alpha=0$ nėra charakteristinės lygties šaknis, tai atskirasis nehomogeninės lygties sprendinys yra

$$y_1=Q_1(x)e^{0x}=Ax+B.$$

Tuomet

$$y_1'=A,\ y_1''=0.$$

y_1, y_1', y_1'' išraiškas įrašę į duotąją lygtį, gauname

$$-3Ax+2A-3B=6x.$$

Iš čia

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} 2A-3B=0, \\ -3A=6 \end{array}\right. \\ x^1 & \end{array}$$

ir $A=-2$, $B=-\frac{4}{3}$, $y_1=-2x-\frac{4}{3}$.

Taigi duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-2x-\frac{4}{3}.$$

3. Išspręsime lygtį

$$y''-y'=3x^2+2x.$$

Kadangi homogeninės lygties

$$y''-y'=0\quad(\lambda_1=0,\ \lambda_2=1)$$

bendrasis sprendinys yra

$$Y=C_1e^{0x}+C_2e^x=C_1+C_2e^x,$$

o $\alpha=0$ — charakteristinės lygties šaknis ir $P_2(x)=3x^2+2x$, tai duotosios lygties atskirasis sprendinys yra šitoks:

$$y_1=xQ_2(x)=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Tuomet

$$\begin{array}{c|r|l} & 0 & \cdot\, y_1=Ax^3+Bx^2+Cx, \\ + & -1 & \cdot\, y_1'=3Ax^2+2Bx+C, \\ & 1 & \cdot\, y_1''=6Ax+2B. \\ \hline \end{array}$$

$$y_1''-y_1'=-3Ax^2+(6A-2B)x+2B-C=3x^2+2x.$$

Sulyginę koeficientus prie atitinkamų x laipsnių, gauname

$$\begin{array}{c|l} x^0 & \left\{\begin{array}{l} 2B-C=0, \\ 6A-2B=2, \\ -3A=3. \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^2 & \end{array}$$

Iš čia

$$A=-1,\ B=-4,\ C=-8,$$

ir duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1+C_2e^x-x^2-4x-8.$$

4. Rasime lygties

$$y''+6y'+9y=8e^{-3x}$$

bendrąjį sprendinį.

Kadangi charakteristinės lygties

$$\lambda^2+6\lambda+9=0$$

šaknys yra lygios $\lambda_1=\lambda_2=-3$, tai homogeninės lygties

$$y''+6y'+9y=0$$

bendrasis sprendinys yra

$$Y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}.$$

Pastebėję, kad $\alpha=-3$ yra charakteristinės lygties kartotinė šaknis ir $P_0(x)=8$, ieškosime duotosios lygties atskirojo sprendinio šio pavidalo:

$$y_1=x^2Q_0(x)e^{-3x}=Ax^2e^{-3x}.$$

Šiuo atveju

$$y_1'=2Axe^{-3x}-3x^2Ae^{-3x},\ y_1''=2Ae^{-3x}-12xAe^{-3x}+9x^2Ae^{-3x}.$$

Gautąsias išraiškas įrašę į duotąją lygtį, gausime lygybę, iš kurios rasime A reikšmę: $A=4$. Vadinasi,

$$y_1=4x^2e^{-3x},$$
$$y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+4x^2e^{-3x}.$$

2. Sakykime, kad

$f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta xP_n(x)$, arba $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta xP_n(x)$;
$\alpha,\ \beta\in R$, $P_n(x)$ — n-ojo laipsnio daugianaris.

Šiuo atveju ieškosime tokio atskirojo sprendinio:

a) jeigu skaičius $\alpha+i\beta$ nėra charakteristinės lygties šaknis, tai

$$y_1=e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x),$$

$Q_n(x)$ ir $R_n(x)$ — n-ojo laipsnio daugianariai su nežinomais koeficientais;

b) jeigu $\alpha+i\beta$ yra charakteristinės lygties šaknis, tai

$$y_1=xe^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x).$$

Pavyzdžiai. 5. Rasime lygties

$$y''+6y'+10y=80e^{x}\cos x$$

sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=4$, $y'(0)=10$.

Kadangi charakteristinės lygties

$$\lambda^2+6\lambda+10=0$$

šaknys yra $-3+i$ ir $-3-i$ ir $\alpha+i\beta=1+i\neq-3+i$, o $P_0(x)=80$, tai

$$Y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x),$$
$$y_1=e^x(A\cos x+B\sin x).$$

Tada

$$\begin{array}{r|c|l} & 10 & \cdot y_1=e^x(A\cos x+B\sin x) \\ + & 6 & \cdot y_1'=e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+B\cos x) \\ & 1 & \cdot y_1''=e^x(-2A\sin x+2B\cos x) \\ \hline \end{array}$$

$$y_1''+6y_1'+10y_1=e^x((16A+8B)\cos x+(16B-8A)\sin x)=$$
$$=80e^x\cos x.$$

Suprastinę šią lygybę iš $e^x\neq0$ ir sulyginę koeficientus prie $\cos x$ ir $\sin x$, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 16A+8B=80, \\ 16B-8A=0. \end{cases}$$

Iš čia $A=4$, $B=2$. Taigi duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2e^x(2\cos x+\sin x).$$

Koeficientų C_1 ir C_2 reikšmes rasime pasinaudoję pradinėmis sąlygomis. Kadangi

$$y'=e^{-3x}(-3C_1\cos x-3C_2\sin x-C_1\sin x+C_2\cos x)+$$
$$+2e^x(3\cos x-\sin x),$$

tai

$$y(0)=C_1+4=4,$$
$$y'(0)=-3C_1+C_2+6=10.$$

Iš čia $C_1=0$, $C_2=4$ ir

$$y_1=4e^{-3x}\sin x+2e^x(2\cos x+\sin x).$$

6. Lygties

$$y''+y=3\sin x$$

atskirasis sprendinys yra

$$y_1=x(A\cos x+B\sin x),$$

nes charakteristinės lygties

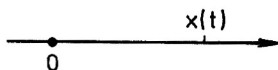
$$\lambda^2+1=0$$

šaknys yra $-i$ ir i, o $P_0(x)=3$, $\alpha+i\beta=i$.

10.7. Dinamikos diferencialinės lygtys

Antrasis Niutono dėsnis yra vienas iš svarbesnių fizikos dėsnių. Jeigu kūnas, kurio masė m, juda tiese, tai jėga ir pagreitis nukreipti judėjimo kryptimi. Tada antrąjį Niutono dėsnį galime užrašyti šitaip:

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}. \quad (1)$$



178 pav.

Tiesėje pasirinkę koordinačių sistemą (178 pav.), (1) lygtį užrašome šitaip:

$$m \cdot x''(t) = F. \quad (2)$$

Dažniausiai F priklauso nuo laiko t, kūno koordinatės x ir greičio x', t. y. $F(t, x, x')$.

Pavyzdžiais iliustruosime, kaip sudaromos diferencialinės lygtys sprendžiant dinamikos uždavinius.

Pavyzdžiai. 1. Iš šautuvo šauta aukštyn. Parašysime kulkos judėjimo lygtį, jeigu iš šautuvo kulka išlekia $800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu $\left(\text{Žemės traukos pagreitis } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Rasime kulkos pakilimo aukštį.

Kadangi Žemės traukos pagreitis nukreiptas prieš judėjimo kryptį, tai $F = -mg$. Kulkos judėjimo diferencialinė lygtis yra

$$m \cdot a = -m \cdot g,$$

t. y.

$$x'' = -10.$$

Šią lygtį du kartus suintegravę, gauname:

$$v = x' = \int x'' dt = -\int 10 dt = -10t + C_1,$$

$$S = \int x' dt = \int (-10t + C_1) dt = -5t^2 + C_1 t + C_2.$$

Konstantų C_1 ir C_2 reikšmes rasime iš pradinių sąlygų: kai $t = 0$, $S = x = 0$, t. y. $C_2 = 0$. Kai $t = 0$, $v(0) = 800$, todėl $C_1 = 800$. Taigi kulka juda pagal dėsnį

$$x = -5t^2 + 800t.$$

Kai kulka pasieks aukščiausią tašką, jos greitis bus lygus nuliui. Tuo remdamiesi apskaičiuosime kulkos skriejimo į viršų laiką:

$$-10t+800=0.$$

Iš čia

$$t=80 \text{ s}.$$

Per 80 s kulka nulėks

$$x=-5\cdot 80^2+800\cdot 80=32000 \text{ m}$$

kelią.

2. Kulka, skriedama $400\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu, pramuša 20 cm storio sieną ir išlekia iš jos $100\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu. Rasime, per kiek laiko kulka perėjo sieną, jeigu sienos pasipriešinimo jėga proporcinga kulkos greičio kvadratui.

Pagal sąlygą kulkos judėjimo sienoje lygtis yra

$$m\cdot x''=-k_1\cdot (x')^2,$$

arba

$$v'=-kv^2 \left(k=\frac{k_1}{m}\right).$$

Suintegravę šią lygtį, gauname:

$$\frac{1}{v}=kt+C_1.$$

Kadangi $v(0)=400$, tai $C_1=\frac{1}{400}$. Kulkos greičio sienoje lygtis yra

$$v=\frac{1}{kt+\frac{1}{400}}=\frac{400}{1+400kt}, \tag{3}$$

arba

$$\frac{dx}{dt}=\frac{400}{1+400kt}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t+\frac{1}{400k}}.$$

Atskyrę kintamuosius ir suintegravę, gauname

$$x=\frac{1}{k}\ln\left(C_2\left(t+\frac{1}{400k}\right)\right).$$

Kai $t=0$, $x=0$, todėl

$$\frac{1}{k}\ln\left(C_2\left(0+\frac{1}{400k}\right)\right)=0.$$

Iš čia $C_2=400k$. Kulkos judėjimo sienoje lygtis yra

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+400kt).$$

Į šią lygtį įrašę $x=0{,}2$ m (sienos storis), randame kulkos judėjimo sienoje laiką T:

$$\frac{1}{k}\ln(1+400kT)=0{,}2,$$

$$T=\frac{e^{0{,}2k}-1}{400k}. \qquad (4)$$

Pasinaudoję sąlyga: kai $t=T$, kulka iš sienos išlekia $100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu, iš (3) formulės randame k:

$$100=\frac{400}{1+400k\cdot\frac{e^{0{,}2k}-1}{400k}};$$

atlikę veiksmus, gauname

$$e^{0{,}2k}=4,$$

arba

$$0{,}2k=\ln 4$$

ir

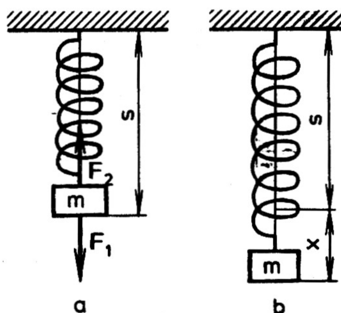
$$k=\frac{\ln 4}{0{,}2}=5\ln 4.$$

Rastąją k reikšmę įrašę į (4) formulę, turime:

$$T=\frac{e^{0{,}2\cdot 5\ln 4}-1}{400\cdot 5\ln 4}=\frac{3}{2000\ln 4}\approx 0{,}001\ \text{s}.$$

Taigi kulka per sieną pereis per 0,001 sekundę.

3. **Harmoninis svyravimas.** Ant spyruoklės pakabintas masės m svarelis (179 pav., *a*). Nekreipdami dėmesio į aplinkos pasipriešinimą, galime tvirtinti, kad svarelį veikia dvi jėgos: sunkio jėga $F_1=mg$ ir spyruoklės pasipriešinimo jėga F_2, kuri pagal Huko dėsnį yra proporcinga spyruoklės ištempimo ilgiui. Ta jėga lygi $-ks$, kai svarelis yra pusiausviras (s — atstumas nuo svarelio



179 pav.

iki pakabinimo taško) ir $F_2=-k(s+x)$, kai svarelis nuo pusiausvyros padėties nutolsta atstumu x (179 pav., *b*). Esant pusiausvyrai $F_1+F_2=0$, t. y. $mg=ks$. Jei svarelį patempsime žemyn ir paleisime, tai jis pradės svyruoti apie pusiausvyros padėtį. Tarkime, kad laiko momentu t svarelis nuo pusiausvyros padėties nutolęs atstumu x. Atstojamoji jėga, kuri tuo momentu veikia svarelį, yra

$$F=F_1+F_2=mg-k(s+x)=-kx.$$

Kita vertus, pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$F=m\cdot a=m\cdot x''.$$

Taigi gavome svarelio svyravimo diferencialinę lygtį

$$mx''=-kx,$$

arba

$$x''+\omega^2x=0;$$

čia

$$\omega=\frac{k}{m}.$$

Šios lygties charakteristinės lygties

$$\lambda^2+\omega^2=0$$

šaknys yra $\lambda_1=\omega i$, $\lambda_2=-\omega i$ ir bendrasis sprendinys —

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\omega t+\right.$$

$$\left.+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\omega t\right).$$

Kadangi

$$\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2+\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2=1,$$

tai pažymėję

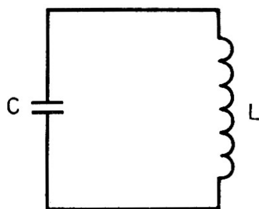
$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\alpha,\ \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\alpha,\ A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},$$

bendrąjį sprendinį užrašysime šitaip:

$$x=A(\sin\alpha\cos\omega t+\cos\alpha\sin\omega t)=A\sin(\omega t+\alpha). \qquad (5)$$

Dydis A vadinamas *svyravimo amplitude,* argumentas $\omega t+\alpha$ — *svyravimo faze,* α — *pradine faze* ir ω — *svyravimo dažniu.*

Svyravimas, aprašomas (5) lygtimi, vadinamas *harmoniniu svyravimu.* Dydžius A ir α galima apskaičiuoti remiantis pradinėmis sąlygomis: kai $t=0$, rutuliuko padėtis $x=x_0$ ir jo greitis $x'(0)=v_0$.



180 pav.

4. Virpesių kontūras. Iš talpos C kondensatoriaus ir prie jo plokštelių prijungtos induktyvumo L ritės sudaryta paprasčiausia grandinė, vadinama virpesių kontūru (180 pav.). Sakykime, kontūro krūvis yra q_0 ir per ritę teka srovė, kurios stiprumas I_0. Rasime srovės stiprumo kitimo dėsnį grandinėje.

Jeigu laiko momentu t kondensatoriaus krūvis yra $q(t)$, o srovės stiprumas — $I(t)$, tai

$$q'(t)=I(t).$$

Iš fizikos žinome, kad grandinėje, sudarytoje iš šaltinio, kurio EVJ lygi E, aktyvios varžos R, ritės, kurios induktyvumas L, ir talpos C kondensatoriaus, galioja lygybė

$$E=U_R+U_C+U_L; \tag{6}$$

čia $U_R=I\cdot R$ — aktyvios varžos įtampa, $U_C=\frac{q}{C}$ — įtampa tarp kondensatoriaus plokštelių ir $U_L=L\frac{dI}{dt}$. Virpesių kontūre nėra aktyvios varžos ir srovės šaltinio, todėl $U_R=E=0$. Šiuo atveju iš (6) gauname

$$U_L+U_C=0,$$

arba

$$L\cdot q''+\frac{q}{C}=0,$$

t. y.

$$q''+\frac{q}{LC}=0.$$

Gavome antrosios eilės diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais. Jos charakteristinės lygties

$$\lambda^2+\frac{1}{LC}=0$$

šaknys yra $\frac{i}{\sqrt{LC}}$ ir $\frac{-i}{\sqrt{LC}}$, o bendrasis sprendinys —

$$q(t)=C_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+C_2\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Šį sprendinį pertvarkę kaip **3** pavyzdyje, turime:

$$q(t)=A\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+\alpha\right).$$

Kai $t=0$, $q(0)=q_0=A\sin\alpha$. (7)

Kadangi

$$q'(t)=\frac{A}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+\alpha\right),$$

tai

$$q'(0)=I_0=\frac{A}{\sqrt{LC}}\cos\alpha. \tag{8}$$

Iš (7) ir (8) lygybių išplaukia, kad

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}, \text{ arba } \alpha=\operatorname{arctg}\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}$$

ir

$$A=\sqrt{q_0^2+I_0^2LC}.$$

Taigi

$$q(t)=\sqrt{q_0^2+I_0^2LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+\operatorname{arctg}\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}\right) \tag{9}$$

ir

$$I(t)=q'(t)=\sqrt{\frac{q_0^2}{LC}+I_0^2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+\operatorname{arctg}\frac{q_0}{I_0\sqrt{LC}}\right). \tag{10}$$

Iš (10) formulės išplaukia, kad srovės stiprumas virpesių kontūre kinta periodiškai dažniu

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

periodu

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$$

ir amplitude

$$A=\sqrt{\frac{q_0^2}{LC}+I_0^2}.$$

Dažnis ir periodas nepriklauso nuo pradinių sąlygų, juos visiškai nustato virpesių kontūro parametrai — ritės induktyvumas L ir kondensatoriaus talpa C.

10.8. Antrosios eilės tiesinės diferencialinės lygtys su kintamais koeficientais

Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{1}$$

$p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — kokiame nors intervale (a, b) kiek norima kartų diferencijuojamos funkcijos.

Tokių lygčių sprendiniai ne visada išreiškiami elementariosiomis funkcijomis, todėl negali būti gaunami paprastai integruojant.

Ieškosime (1) lygties sprendinio, kuris tenkina pradines sąlygas $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ ir kurį galima išreikšti laipsnine eilute.

Nagrinėdami pavyzdį, trumpai susipažinsime su dviem (1) lygties sprendimo būdais: 1) kartotiniu diferencijavimu; 2) neapibrėžtų koeficientų metodu.

Pavyzdys. Rasime lygties

$$y''+(x+1)y'+2x^2y=x \tag{2}$$

sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

1 būdas. Sakykime, $y(x)$ yra (2) lygties sprendinys, kurį galime išskleisti Makloreno eilute (jeigu $x_0\neq 0$ — Teiloro eilute)

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+y''(0)\frac{x^2}{2!}+y'''(0)\frac{x^3}{3!}+y^{\text{IV}}(0)\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Iš pradinių sąlygų išplaukia, kad $y(0)=1$, $y'(0)=3$. Šias reikšmes įrašę į (2) lygtį, gauname

$$y''(0)+(0+1)\cdot 3+2\cdot 0^2\cdot 1=0,$$

t. y. $y''(0)=-3$.

(2) lygtį paeiliui diferencijuodami, gauname:

$$y'''+(x+1)y''+(2x^2+1)y'+4xy=1,$$
$$y^{\text{IV}}+(x+1)y'''+(2x^2+2)y''+8xy'+4y=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Iš čia nesunkiai randame

$$y'''(0)=1,\ y^{\text{IV}}(0)=1,\ \ldots$$

Taigi (2) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, yra

$$y(x)=1+3x-\frac{3x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{40x^5}{5!}+\cdots \tag{3}$$

2 būdas. Ieškosime (2) lygties sprendinio $y(x)$, kuris yra laipsninės eilutės su nežinomais koeficientais suma:

$$y(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+\ldots \tag{4}$$

(4) lygybę išdiferencijavę du kartus

$$y'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4+\ldots, \tag{5}$$

$$y''(x)=2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3+\ldots \tag{6}$$

ir $y(x)$, $y'(x)$ ir $y''(x)$ išraiškas įrašę į (2) lygtį, gauname tapatybę

$$(2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3+\cdots)+(x+1)(C_1+2C_2x+3C_3x^2+ \\ +4C_4x^3+5C_5x^4+\cdots)+2x^2(C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+ \\ +C_5x^5+\cdots)-x=0,$$

arba

$$(C_1+2C_2)+(-1+C_1+2C_2+6C_3)x+(2C_0+2C_2+3C_3+ \\ +12C_4)x^2+(2C_1+3C_3+4C_4+20C_5)x^3+\cdots=0.$$

Iš čia

$$\begin{array}{c} C_1+2C_2=0, \\ -1+C_1+2C_2+6C_3=0, \\ 2C_0+2C_2+3C_3+12C_4=0, \\ 2C_1+3C_3+4C_4+20C_5=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (7)$$

Remdamiesi pradinėmis sąlygomis, kai $x=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$, iš (4) ir (5) lygybių gauname:

$$C_0=1,\ C_1=3.$$

Dabar iš (7) sistemos randame:

$$C_2=-\frac{3}{2},\ C_3=\frac{1}{6},\ C_4=\frac{1}{24},\ C_5=-\frac{1}{3},\ \cdots$$

Vadinasi, ieškomasis diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y(x)=1+3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{3}x^5+\cdots$$

Jis sutampa su pirmuoju būdu gautu sprendiniu.

10.9. Pratimai

Patikrinkite, ar duotosios funkcijos yra diferencialinių lygčių sprendiniai:

1. $yy'=x$, $y=\sqrt{x^2+C}$.

2. $xy'=2y$, $y=5x^2$.

3. $y'=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{x}$.

4. $y'+2y=e^x$, $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$.

5. $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$.

6. $xydx+\sqrt{1-x^2}dy=0$, $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$.

Raskite bendruosius diferencialinių lygčių sprendinius:

7. $y'=\cos^2 x$.

8. $y'=\frac{2x}{x^2+1}$.

9. $y'=\sin^3 x$.

10. $y'=x\cos x$.

11. $y'=x^2e^x$.

12. $y'=\sin x\cos 3x$.

13. $y'=2e^x\cos x$.

14. $y'=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

15. $y'=xe^{-x^2}$.

16. $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Raskite atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:

17. $y' = \frac{2}{1+4x}$, $y(0) = -2$.

18. $y' = -2xe^{-x^2}$, $y(0) = 1$.

19. $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$.

20. $y' = 2\sqrt{x} + \frac{7}{x}$, $y(1) = 2$.

Raskite diferencialinių lygčių sprendinius:

21. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$.

22. $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$.

23. $(1+y^2)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$.

24. $(xy^2+x)dx + (y+x^2y)dy = 0$.

25. $y' = y \ln y$.

26. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.

27. $y' = y\sqrt{y}$.

28. $xy' = y$.

29. $xy' + y = 0$.

30. $y' = y$.

31. $xydx + (x+1)dy = 0$.

32. $(1+y^2)dx + xydy = 0$.

33. $(1+y^2)dx = xdy$.

34. $\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$.

35. $(xy+y)dx = xdy$.

Raskite diferencialinių lygčių atskiruosius sprendinius, tenkinančius pradines sąlygas:

36. $(1-x)dy - ydx = 0$, $y(0) = 1$.

37. $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

38. $dy + y \operatorname{tg} xdx = 0$, $y(0) = 1$.

39. $(1-x^2)dy + xydx = 0$, $y(0) = 4$.

40. $(1+y^2)dx - xydy = 0$, $y(1) = 0$.

41. $y' \operatorname{tg} x = y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

42. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

43. $xy' = 2y$, $y(2) = 3$.

44. $2\sqrt{y}dx = dy$, $y(0) = 1$.

45. $x^2dx + ydy = 0$, $y(0) = 1$.

46. Parašykite lygtį kreivės, kuri eina per tašką $(-1, 1)$ ir kurios liestinės krypties koeficientas kiekviename lietimosi taške lygus to taško ordinatės kvadratui.

47. Parašykite lygtį kreivės, kuri eina per tašką $(0, -2)$ ir kurios liestinės krypties koeficientas kiekviename lietimosi taške tris kartus didesnis už to taško ordinatę.

48. Raskite kreivę, kuri eina per tašką $(3, 1)$ ir kurios liestinės atkarpa, esanti tarp koordinačių ašių, lietimosi taške dalijasi pusiau.

49. Raskite kelią, nueitą kūno per 20 s, jeigu jo greitis proporcingas nueitam keliui ir jeigu kūnas 100 m nueina per 10 s, o 200 m — per 15 s.

50. Į rezervuarą, kuriame yra 60 l druskos tirpalo, kiekvieną minutę įteka 3 l vandens ir tuojau pat susimaišo su tirpalu. Mišinys tokiu pat greičiu išteka iš rezervuaro. Kiek kg druskos liks rezervuare po 1 h, jeigu jos iš pradžių buvo 5 kg?

51. 200 m^3 talpos kambaryje yra 0,15% anglies dvideginio (CO_2). Ventiliatorius per 1 min. į kambarį įpučia 20 m^3 oro, kuriame yra 0,04% anglies dvideginio, ir tiek pat oro mišinio pašalina. Per kiek laiko kambaryje anglies dvideginio kiekis sumažės trigubai?

52. Kūnas, kurio temperatūra 100 °C, įneštas į 20 °C temperatūros kambarį, per 10 min. ataušta iki 60 °C. Per kiek laiko kūnas atauš iki 25 °C?

53. 18 °C temperatūros aplinkoje kūnas per 15 min. ataušta nuo 90 °C iki 54 °C. Kokia bus kūno temperatūra po 45 min?

54. Radžio skilimo greitis proporcingas radžio kiekiui. Žinoma, kad pusė radžio kiekio suskyla per 1600 metų. Kiek liks radžio po 100 metų, jei iš pradžių jo buvo 1 kg?

55. Motorinė valtis stovinčiame vandenyje juda 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu. Išjungus motorą, per 40 s jos greitis sumažėja iki 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Raskite valties greitį praėjus **2 min.** po motoro išjungimo, jeigu vandens pasipriešinimo jėga proporcinga valties judėjimo greičiui.

Išspręskite diferencialines lygtis:

56. $(4x-3y)+y'(2y-3x)=0$.
57. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.
58. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.
59. $xy'-y=x\,\text{tg}\,\frac{y}{x}$.
60. $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.
61. $y'-y=e^x$.
62. $y'-y=x$.
63. $xy'-y=x^2\cos x$.
64. $xy'-3y=x^2$.
65. $2xy'-y=3x^2$.
66. $y'+2y=x^2+2x$.
67. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.
68. $y'+2xy=2x^3$.
69. $y'+y\cos x=\sin x\cdot\cos x$.
70. $xy'+2y=x^2$.
71. $xy'-4y=2x^2\sqrt{y}$.
72. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$.
73. $y'+y=xy^3$.
74. $y'-y\,\text{ctg}\,x=\frac{y^3}{\sin x}$.
75. $3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$.

Raskite diferencialinių lygčių sprendinius, tenkinančius pradines sąlygas:

76. $y'-y\,\text{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}$, $y(0)=0$.
77. $y'+x^2y=x^2$, $y(0)=1$.
78. $xy'-3y=x^4e^x$, $y(1)=e$.
79. $y'\sin x-y\cos x=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
80. $y'+x^2y=x^2$, $y(0)=2$.

Išspręskite diferencialines lygtis, žemindami jų eilę:

81. $y''=\frac{2}{x^3}$.
82. $y''=\sin x\cdot\cos x$.
83. $2xy''=y'$.
84. $xy''-y'=0$.
85. $y''=y'$.

Parašykite homogeninę tiesinę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais, kai žinoma jos charakteristinė lygtis:

86. $\lambda^2-2\lambda-8=0$.
87. $\lambda(\lambda-2)=0$.
88. $\lambda^2=0$.

Parašykite diferencialinę lygtį, kai žinomos jos charakteristinės lygties šaknys:

89. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$.
90. $\lambda_1=\lambda_2=1$.
91. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$.
92. $\lambda_1=4i$, $\lambda_2=-4i$.
93. $\lambda_1=3+2i$, $\lambda_2=3-2i$.

Išspręskite diferencialines lygtis:

94. $y''-y=0$. **95.** $y''+3y'=0$.

96. $y''+y'-2y=0$. **97.** $y''-4y'+4y=0$.

98. $y''+y=0$. **99.** $y''+4y'+8y=0$.

100. $y''-8y'+25y=0$. **101.** $y''+13y'+42y=0$.

102. $y''+2y'+5y=0$. **103.** $y''+5y=0$.

Raskite atskirąjį diferencialinės lygties sprendinį, tenkinantį nurodytas sąlygas:

104. $y''+5y'+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-6$.

105. $y''+9y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

106. $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

107. $y''+4y'=0$, $y(0)=7$, $y'(0)=8$.

108. $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$.

Išspręskite diferencialines lygtis:

109. $y''-5y'+6y=x$. **110.** $y''+4y'+4y=3e^{3x}$.

111. $y''-9y=-x+2$. **112.** $y''-2y'=x^2-x$.

113. $y''+4y=x^2$. **114.** $y''+y=\cos x$.

115. $y''+y=12\sin 2x$. **116.** $y''+4y'=4xe^{-4x}$.

117. $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$. **118.** $y''+y=4\sin x$.

Parašykite lygties atskirąjį sprendinį su neapibrėžtais koeficientais (koeficientų reikšmių neskaičiuokite):

119. $y''-3y'=5$. **120.** $y''+4y'=e^{-4x}$.

121. $y''+25y=\sin 5x$. **122.** $y''+25y=\cos 5x$.

123. $y''-3y'=xe^{3x}$. **124.** $y''+6y'+9y=xe^{-3x}$.

125. $y''+5y=\sin 3x$. **126.** $y''+4y'+4y=x^2e^{2x}$.

127. $y''+2y'+y=(x^2+1)e^{-x}$. **128.** $y''+2y'+2y=xe^{-x}\sin x$.

129. Iš kreivių šeimos, apibrėžtos diferencialine lygtimi $y''=3x^2-4x^3$, išskirkite kreivę, einančią per tašką (0, 1) ir šiame taške liečiančią tiesę $x+y-1=0$.

130. Sudarykite taškinio kūno judėjimo lygtį, jeigu jo pagreitis $a=1{,}2t$ ir $S=0$, kai $t=0$; $S=20$, kai $t=5$.

131. Materialusis taškas krinta iš 1000 m aukščio. Per kiek laiko ir kokiu greičiu jis nukris ant žemės, jeigu žemės traukos pagreitis $g=10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (oro pasipriešinimo nepaisykite).

132. Traukinys, kurio greitis $v_0=20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, pradedamas stabdyti. Po kiek laiko nuo stabdymo pradžios sustos traukinys ir kokį nueis kelią, jei traukinio pasipriešinimo judėjimui jėga proporcinga traukinio masei, o proporcingumo koeficientas $k=0{,}2$.

133. 2000 m aukštyje nuo žemės paviršiaus šauta į viršų. Iš šautuvo kulka išlekia 800 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu. Į kokį aukštį ir per kiek laiko pakils kulka? Per kiek laiko ir kokiu greičiu kulka nukris ant žemės?

10.10. Atsakymai

1. Taip. **2.** Taip. **3.** Ne. **4.** Taip. **5.** Taip. **6.** Taip. **7.** $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$. **8.** $y=\ln(x^2+1)+C$. **9.** $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **10.** $y=x\sin x+\cos x+C$. **11.** $y=e^x(x^2-2x+2)+C$. **12.** $y=-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **13.** $y=e^x(\cos x+\sin x)+C$. **14.** $y=2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **15.** $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **16.** $y=-\sqrt{1-x^2}+C$. **17.** $y=\frac{1}{2}\ln|4x+1|-2$. **18.** $y=e^{-x^2}$. **19.** $y=\frac{1}{x}-1$. **20.** $y=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{7}{3x^3}+3$. **21.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\pm 1$. **22.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **23.** $\arcsin x-\operatorname{arctg} y=C$, $x=\pm 1$. **24.** $(x^2+1)(y^2+1)=C$. **25.** $\ln y=Ce^x$. **26.** $y-\operatorname{arctg} y=x+C$. **27.** $y^{-0,5}=-\frac{1}{2}x+C$. **28.** $y=Cx$. **29.** $xy=C$. **30.** $y=Ce^x$. **31.** $y=C(x+1)e^{-x}$. **32.** $x^2(1+y^2)=C$. **33.** $y=\operatorname{tg}\ln Cx$. **34.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$. **35.** $y=Cxe^x$. **36.** $y=\frac{1}{1-x}$. **37.** $y=\arcsin x$. **38.** $y=\cos x$. **39.** $y=4\sqrt{1-x^2}$. **40.** $x^2-y^2=1$. **41.** $y=\sqrt{2}\sin x$. **42.** $y=2\sqrt{2}\sin x-1$. **43.** $y=\frac{3}{4}x^2$. **44.** $y=(1+x)^2$. **45.** $2x^3+3y^2=3$. **46.** $xy=-1$. **47.** $y=-2e^{3x}$. **48.** $xy=3$. **49.** 400 m. **50.** 0,25 kg. **51.** Anglies dvideginio kiekis $x(t)=0{,}08+0{,}22e^{-0{,}1t}$; $x=0{,}1$, kai $t=10\ln 11\approx 24$ min. **52.** 40 min. **53.** 27°. **54.** 0,958 kg. **55.** $0{,}32\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **56.** $y^2-3xy+2x^2=C$. **57.** $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **58.** $x(y-x)=Cy$, $y=0$. **59.** $\sin\frac{y}{x}=Cx$. **60.** $ye^{-\frac{y}{x}}=C$. **61.** $y=(x+C)e^x$. **62.** $y=Ce^x-x-1$. **63.** $y=x(\sin x+C)$. **64.** $y=Cx^3-x^2$. **65.** $y=C\sqrt{x}+x^2$. **66.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{4}(2x^2+2x-1)$. **67.** $y=(1+x^2)(x+C)$. **68.** $y=Ce^{-x^2}+x^2-1$. **69.** $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$. **70.** $y=\frac{C}{x^2}+\frac{x^2}{4}$. **71.** $y=x^4\ln^2 Cx$, $y=0$. **72.** $y=\frac{x-1}{C-x}$, $y=0$. **73.** $y=\frac{1}{\sqrt{x+0{,}5+Ce^{2x}}}$, $y=0$. **74.** $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$, $y=0$. **75.** $y^3=Cx^2+x^3$. **76.** $y=\frac{x}{\cos x}$. **77.** $y=1$. **78.** $y=x^3e^x$. **79.** $y=\sin x-\cos x$. **80.** $y=1+e^{-\frac{x^3}{3}}$. **81.** $y=\frac{1}{x}+C_1x+C_2$. **82.** $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x+C_2$. **83.** $y=C_1x^{1,5}+C_2$. **84.** $y=C_1x^2+C_2$. **85.** $y=C_1e^x+C_2$. **86.** $y''-2y'-8y=0$. **87.** $y''-2y'=0$. **88.** $y''=0$. **89.** $y''-3y'+2y=0$. **90.** $y''-2y'+y=0$. **91.** $y''-5y'=0$. **92.** $y''+16y=0$. **93.** $y''-6y'+13y=0$. **94.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **95.** $y=C_1+C_2e^{-3x}$. **96.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$. **97.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **98.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. **99.** $y=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **100.** $y=e^{4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **101.** $y=$

$=C_1e^{-6x}+C_2e^{-7x}$. **102.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **103.** $y=C_1\cos\sqrt{5}x+$ $+C_2\sin\sqrt{5}x$. **104.** $y=4e^{-3x}-3e^{-2x}$. **105.** $y=\frac{1}{3}\sin 3x$. **106.** $y=2xe^{3x}$. **107.** $y=9-$ $-2e^{-4x}$. **108.** $y=3e^{-2x}\sin 5x$. **109.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}$. **110.** $y=$ $=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{3}{25}e^{3x}$. **111.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}$. **112.** $y=C_1+$ $+C_2e^{2x}-\frac{1}{6}x^3$. **113.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$. **114.** $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$. **115.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-4\sin 2x$. **116.** $y=C_1+C_2e^{-4x}-$ $-\frac{1}{4}x(2x+1)e^{-4x}$. **117.** $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+4x^2e^{-2x}$. **118.** $y=C_1\cos x+C_2\times$ $\times\sin x-2x\cos x$. **119.** $y_1=Ax$. **120.** $y_1=Axe^{-4x}$. **121.** $y_1=x(A\cos 5x+B\times$ $\times\sin 5x)$. **122.** $y_1=x(A\cos 5x+B\sin 5x)$. **123.** $y_1=x(Ax+B)e^{3x}$. **124.** $y_1=$ $=x^2(Ax+B)e^{-3x}$. **125.** $y_1=A\sin 3x+B\cos 3x$. **126.** $y_1=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}$. **127.** $y_1=x^2(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$. **128.** $y_1=e^{-x}x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$. **129.** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-x+1$. **130.** $S=0{,}2t^3-t$. **131.** $t=14{,}14$ s, $v=141{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **132.** 100 s, 1 km. **133.** Per 80 s kulka pakils į 34 km aukštį. Per 82,5 s kulka nukris ant žemės $825\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ greičiu.

11. TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

11.1. Tikimybių teorijos objektas

Mus supančiame pasaulyje kiekvienas reiškinys yra susijęs su daugybe kitų reiškinių. Kiekviena mokslo šaka paprastai nagrinėja tik nedidelį tų ryšių skaičių. *Eksperimentu* (*bandymu*) laikysime kokių nors sąlygų realizavimą. *Įvykiu* vadinsime kiekvieną faktą, kuris gali įvykti arba neįvykti atlikus eksperimentą. Sakysime, kad įvykis yra *būtinas*, jeigu jis visada įvyksta atlikus eksperimentą.

1 pavyzdys. Apvertus stiklinę su vandeniu dugnu į viršų (eksperimentas), iš jos vanduo būtinai išbėgs (įvykis). Pakeitus eksperimento sąlygas, įvykis gali neįvykti. Jeigu stiklinėje vandenį užšaldysime, o po to stiklinę apversime dugnu į viršų, tai iš jos vanduo neišbėgs.

Įvykį vadinsime *negalimu*, jeigu jis niekada neįvyksta atlikus eksperimentą.

Pavyzdžiai. 2. Į taikinį šauta 2 kartus (eksperimentas) ir pataikyta 3 kartus (negalimas įvykis).

3. Keturženklis skaičius, sudarytas iš skaitmenų 1, 3, 5, 7 (eksperimentas), dalijasi iš 3 (negalimas įvykis).

Tačiau ne visi įvykiai yra būtini arba negalimi.

Įvykis vadinamas *atsitiktiniu*, jeigu, atlikus eksperimentą, jis gali įvykti arba neįvykti.

Pavyzdžiai. 4. Išmetus monetą, herbas gali atsiversti, gali ir neatsiversti.

5. Medžiotojas šovė į kiškį ir pataikė, bet galėjo ir nepataikyti.

Atsitiktinius įvykius žymėsime raidėmis A, B, C ir t. t. be indeksų arba su jais. Būtinąjį įvykį žymėsime U, negalimąjį — V.

Pažymėsime, kad atsitiktinis įvykis įvyksta dėl daugelio konkrečių priežasčių. Pavyzdžiui, tai, kad, metus monetą, atsivertė herbas, priklauso nuo monetos formos, oro pasipriešinimo ir t. t. Jei žinotume visas priežastis, tai galėtume pasakyti, ar herbas atsivers, ar neatsivers. Iš anksto negalime pasakyti, įvyks ar neįvyks pavienis atsitiktinis įvykis. Tačiau visai kitaip yra nagrinėjant daug kartų pasikartojančius bandymus. Toliau nagrinėsime tik tokius bandymus, kuriuos galima pakartoti (tomis pačiomis sąlygomis) neribotą skaičių kartų. Toks yra monetos metimas, tyrimas, ar detalė standartinė, ar ne ir kt. Bet koks atsitiktinis įvykis, kuris gali įvykti atliekant bandymus, vadinamas *masiniu*, arba *statistiniu*.

Masinius atsitiktinius įvykius reikia skirti nuo išskirtinių įvykių, kai eksperimento pakartoti negalima. Pavyzdžiui, įvykis „1996 m. sausio mėn. 1 d. buvo giedra“ yra išskirtinis įvykis, tačiau įvykis „Sausio mėn. 1 d. buvo giedra“ yra masinis.

Tikimybių teorija tiria masinių atsitiktinių įvykių dėsningumus. Iš pirmo žvilgsnio atrodo nelogiška kalbėti apie atsitiktinių dydžių dėsningumus. Vienok tokie dėsningumai egzistuoja ir juos žinoti labai svarbu praktikai.

Tikimybių teorijos sąvokos pradėjo formuotis XVI—XVII a., mėginant kurti azartinių žaidimų matematinę teoriją (Dž. Kardanas (Cardano), K. Hiuigencas, B. Paskalis (Pascal), P. Ferma

ir kt.). Didelį indėlį į tikimybių teoriją įnešė J. Bernulis (Bernoulli). Jo įrodyta teorema, dabar vadinama „Didžiųjų skaičių dėsniu“, buvo pirmasis teorinis jau anksčiau žinomų faktų pagrindimas. Kuriant tikimybių teorijos matematinį aparatą, svarbų vaidmenį suvaidino A. Muavras (Moivre), P. Laplasas (Laplace), K. Gausas (Gauss), S. Puasonas (Poisson). Tikimybių teorijos taikymai susiję su rusų matematikų S. Bernšteino, P. Čebyševo, A. Liapunovo, A. Kolmogorovo, A. Chinčino ir kt. vardais.

Tikimybių teorija Lietuvoje turi gražias tradicijas. Jau XVIII a. Vilniaus universitete dėstoma tikimybių teorija (P. Norvaiša, Z. Revkovskis). Ypač Lietuvą išgarsino darbais iš tikimybių teorijos ir jos taikymais J. Kubilius, V. Statulevičius, Br. Grigelionis bei jų mokiniai.

Tikimybių teorijos metodai plačiai taikomi įvairiose srityse: matavimo paklaidų teorijoje, balistikoje ir demografijoje, teorinėje fizikoje, geodezijoje, astronomijoje, automatinio valdymo teorijoje, bendrojoje ryšių teorijoje ir kt.

11.2. Atsitiktinių įvykių rūšys

Du įvykius A ir B vadinsime *lygiais,* jeigu A įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta B. Rašysime $A=B$.

Pavyzdžiai. 1. Įvykiai A —„Metus monetą, atsivertė skaičius“ ir B —„Metus monetą, neatsivertė herbas“ yra lygūs (laikysime galimomis tik dvi monetos padėtis).

2. Įvykiai A —„Šaulys pataikė į taikinį antruoju šūviu“ ir B —„Šaulys į taikinį pataikė iš 2 šūvių, nors pirmuoju šūviu nepataikė“ yra lygūs.

Sakysime, kad *įvykis A yra įvykio B dalis,* jeigu įvykus B būtinai įvyksta ir A, bet jei įvyko A, tai dar nereiškia, kad būtinai įvyks B. Rašysime $A \subset B$ arba $B \supset A$.

3 **pavyzdys.** Lošimo kauliukas yra kubas, kurio sienelės pažymėtos „akutėmis“ — mažomis duobutėmis. Vienoje sienelėje yra viena, kitoje — dvi, trečioje — trys ir t. t. iki šešių akučių. Laikysime, kad metus kauliuką gali atsiversti tik viena iš šešių sienelių su atitinkamu akučių skaičiumi. Įvykį „Atsivertė k akučių“ žymėsime A_k ($k=1, 2, \ldots, 6$). Įvykis A_2 yra įvykio B —„Atsivertė lyginis skaičius akučių“ dalis, o įvykis A_3 yra įvykio C —„Atsivertė akučių skaičius, dalus iš 3“ dalis.

Kai kuriuos eksperimente nagrinėjamus įvykius galime laikyti sudarytais iš kitų — atskirųjų įvykių. Trečiajame pavyzdyje įvykis B sudarytas iš įvykių A_2, A_4, A_6, o įvykis C — iš įvykių A_3, A_6.

Įvykiai, kurie yra neskaidomi ir negali įvykti kartu, vadinami *elementariaisiais įvykiais.*

Trečiajame pavyzdyje įvykiai A_1, A_2, ..., A_6 — elementarieji įvykiai, o B ir C nėra elementarieji įvykiai.

Visų elementariųjų įvykių, susijusių su eksperimentu, aibę vadinsime *elementariųjų įvykių erdve* ir žymėsime Ω.

Du įvykius vadinsime *nesutaikomais*, jeigu jie negali įvykti kartu. Priešingu atveju sakysime, kad įvykiai yra *sutaikomi.*

Jeigu kalbėsime apie didesnį nesutaikomų įvykių skaičių, suprasime, kad bet kurie du iš tų įvykių yra nesutaikomi.

Pavyzdžiai. 4. Dėžėje yra dviejų rūšių detalės: standartinės ir nestandartinės. Atsitiktinai iš dėžės išimama viena detalė. Įvykiai A —„Detalė yra standartinė“ ir B —„Detalė yra nestandartinė“ nesutaikomi.

5. Metame lošimo kauliuką. Įvykiai A —„Atsivertė 2 akys“ ir B —„Atsivertė lyginis akių skaičius“ yra sutaikomi.

6. Į taikinį šauta du kartus. Nagrinėsime įvykius: A —„Nepataikyta nė karto“, B —„Vieną kartą pataikyta“, C —„Du kartus pataikyta“, D —„Neprašauta“, H —„Bent vieną kartą pataikyta“. Įvykiai A ir B, A ir C, A ir D, A ir H, B ir C — nesutaikomi, o įvykiai B ir H, C ir H, D ir H — sutaikomi. Akivaizdu, kad $B \subset H$, $C \subset H$, $D \subset H$ ir $C = D$.

7. Metamos dvi monetos. Įvykiai $A_1 = \{H, H\}$ —„Atsivertė abu herbai“, $A_2 = \{H, S\}$ —„Pirma moneta atsivertė herbu, o antra — skaičiumi“ — $A_3 = \{S, H\}$ ir $A_4 = \{S, S\}$ yra nesutaikomi.

Sakysime, kad įvykiai A_1, A_2, A_3, ..., A_n sudaro *pilnąją įvykių erdvę,* jeigu, atlikus eksperimentą, būtinai įvyks bent vienas iš tų įvykių.

8 pavyzdys. Pirkti du loterijos bilietai. Įvykiai A_1 —„Laimėjo abu bilietai“, A_2 —„Laimėjo pirmas bilietas, bet nelaimėjo antras“, A_3 — „Laimėjo antras bilietas, bet nelaimėjo pirmas“, A_4 —„Laimėjo tik vienas bilietas“, A_5 —„Nelaimėjo nė vienas bilietas“ sudaro pilnąją įvykių erdvę. Tarp šios erdvės įvykių yra sutaikomų ir yra nesutaikomų įvykių. Pavyzdžiui, įvykiai A_1 ir A_2 yra nesutaikomi, o įvykiai A_3 ir A_4 — sutaikomi.

7 pavyzdyje įvykiai A_1, A_2 A_3 ir A_4 sudaro pilnąją tarpusavyje nesutaikomų įvykių erdvę.

Du įvykius vadinsime *priešingais*, jeigu jie yra nesutaikomi ir sudaro pilnąją įvykių erdvę. Įvykiui A priešingą įvykį žymėsime $\bar{A}$.

Pavyzdžiai. 9. Metame monetą. Įvykiui A —„Atsivertė herbas" priešingas įvykis $\bar{A}$ —„Atsivertė skaičius".

10. Metame kauliuką. Įvykiui A —„Atsivertė 5 akutės" priešingas įvykis $\bar{A}$ —„Atsivertė ne 5 akutės".

Du ar kelis įvykius vadinsime *vienodai galimais,* jeigu eksperimento metu yra vienodos galimybės įvykti kiekvienam iš jų.

Pavyzdžiai. 11. Metus idealią monetą, skaičiaus ar herbo pasirodymas yra vienodai galimas.

12. Metus idealų kauliuką, kiekvienos sienelės atsivertimo galimybės visiškai vienodos.

11.3. Klasikinis tikimybės apibrėžimas. Tikimybių skaičiavimo pavyzdžiai

Nagrinėsime tik vienodo galimumo nesutaikomų elementariųjų įvykių erdvę Ω.

Tuos elementariuosius įvykius, iš kurių sudarytas įvykis A, vadinsime *įvykiui A palankiais* įvykiais.

Pavyzdžiai. 1. Dėžėje yra vienodo dydžio 5 balti, 4 raudoni ir 1 mėlynas rutuliukai. Iš dėžės atsitiktinai išimamas vienas rutuliukas. Galimi tokie elementarieji įvykiai: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — „Išimtas baltas rutuliukas", A_6, A_7, A_8, A_9 —„Išimtas raudonas rutuliukas" ir A_{10} —„Išimtas mėlynas rutuliukas". Įvykiui A —„Išimtas raudonas rutuliukas" palankūs A_6, A_7, A_8 ir A_9 įvykiai, o įvykiui B —„Išimtas ne baltas rutuliukas" palankūs A_6, A_7, A_8, A_9 ir A_{10} įvykiai.

2. Metame lošimo kauliuką. Elementariųjų įvykių erdvė yra A_k —„Atsivertė k akučių", $k=1, 2, \ldots, 6$. Nagrinėkime įvykius A — „Atsivertė 5 akutės", B —„Atsivertė lyginis skaičius akučių", C — „Atsivertė ne mažiau kaip 3 akutės", D —„Atsivertė ne daugiau kaip 2 akutės". Yra vienintelis įvykiui A palankus elementarusis įvykis A_5. Įvykiui B palankūs įvykiai A_2, A_4 ir A_6, įvykiui C — įvykiai A_3, A_4, A_5 ir A_6, o įvykiui D — įvykiai A_1 ir A_2.

Įvykio pasirodymo galimybę patogu vertinti tam įvykiui palankių ir visų vienodai galimų elementariųjų įvykių, sudarančių pilnąją nesutaikomų įvykių erdvę, skaičių santykiu.

Sakykime, m yra skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, n — bendras vienodai galimų nesutaikomų elementariųjų įvykių, sudarančių pilnąją įvykių erdvę, skaičius.

Santykį $\frac{m}{n}$ vadinsime *įvykio A tikimybe* ir žymėsime

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Pirmajame pavyzdyje $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Antrajame pavyzdyje $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(D)=$ $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Iš įvykio tikimybės apibrėžimo išplaukia šios savybės.

1) *Būtinojo įvykio U tikimybė lygi* 1, t. y.

$$P(U)=1. \tag{2}$$

Iš tikrųjų visi elementarieji įvykiai yra palankūs būtinajam įvykiui, todėl $m=n$ ir $P(U)=\frac{n}{n}=1$;

2) *Negalimojo įvykio V tikimybė lygi nuliui, t. y.*

$$P(V)=0. \tag{3}$$

Šiuo atveju nė vienas elementarusis įvykis nėra palankus įvykiui V, todėl $m=0$ ir $P(V)=\frac{0}{n}=0$.

3) *Atsitiktinio įvykio A tikimybė yra teigiamasis skaičius, esantis tarp* 0 *ir* 1:

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{4}$$

Iš tikrųjų ne visi elementarieji įvykiai yra palankūs atsitiktiniam įvykiui A, todėl $0\leqslant m\leqslant n$ ir $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$.

Pavyzdžiai. 3. Dėžėje yra 25 standartinės ir 5 nestandartinės detalės. Iš dėžės atsitiktinai išimta viena detalė. Apskaičiuosime tikimybę, kad išimtoji detalė yra standartinė.

Nagrinėsime įvykį A —„Iš dėžės išimta detalė yra standartinė". Iš visų 30 elementariųjų nesutaikomų įvykių tik 25 įvykiai yra palankūs įvykiui A. Todėl $P(A)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$.

4. Iš 35 bilietų, kurie sunumeruoti nuo 1 iki 35, atsitiktinai traukiamas vienas bilietas. Apskaičiuosime įvykio A —„Ištraukto bilieto numeris dalijasi iš 3“ tikimybę.

Iš 35 elementariųjų įvykių yra 11 įvykiui A palankių įvykių: ištrauktas bilietas, kurio numeris 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Vadinasi, $P(A)=\frac{11}{35}$.

5. Monetą metame du kartus. Apskaičiuosime įvykio A —„Bent kartą atsivertė herbas“ tikimybę.

Elementariųjų įvykių erdvė susideda iš šių įvykių: $\{H, H\}$, $\{H, S\}$, $\{S, H\}$ ir $\{S, S\}$. Akivaizdu, kad įvykiui A palankūs 3 elementarieji įvykiai. Todėl $P(A)=\frac{3}{4}$.

6. Vienodų detalių partijoje yra 5% nekokybiškų detalių. Apskaičiuosime įvykio A —„Atsitiktinai paimta detalė yra nekokybiška“ tikimybę.

Sakykime, partijoje yra n detalių. Tuomet $\frac{5n}{100}$ detalių yra nekokybiškos ir

$$P(A)=\frac{\frac{5n}{100}}{n}=\frac{1}{20}.$$

7. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuosime tikimybes šių įvykių: A —„Ant abiejų kauliukų atsivertė po lygiai akučių“, B — „Akučių skirtumas didesnis už 3“, C —„Akučių suma lygi 7“ ir D —„Akučių suma lygi 8“.

Kad lengviau būtų skaičiuoti kiekvienam įvykiui palankius elementariuosius įvykius, sudarome visų elementariųjų įvykių lentelę.

I kauliuko akutės	II kauliuko akutės					
	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Šioje lentelėje matome, kad įvykiui A yra palankūs įvykiai (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) ir (6, 6); įvykiui B palankūs įvykiai (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2); įvykiui C — įvykiai (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6) ir įvykiui D — įvykiai (6, 2), (2, 6), (4, 4), (3, 5) ir (5, 3). Vadinasi,

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(D)=\frac{5}{36}.$$

11.4. Pagrindinės kombinatorikos sąvokos

11.3 skyrelyje nagrinėtuose pavyzdžiuose elementariųjų įvykių erdvės turėjo nedaug elementų, todėl kiekvienam nagrinėjamam įvykiui buvo nesunku rasti palankių elementariųjų įvykių skaičių. Kai elementariųjų įvykių yra daug, sudėtingesnių įvykių tikimybes skaičiuojame remdamiesi kombinatorikos taisyklėmis.

Sakykime, turime keletą elementų $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Suskirstykime juos į grupes, turinčias vienodą elementų skaičių. Tokias grupes vadinsime *junginiais.*

Dažnai tenka skaičiuoti, kiek junginių galima sudaryti iš duotųjų elementų pagal kokią nors taisyklę. Tokius uždavinius vadiname *kombinatoriniais,* o juos nagrinėjančią matematikos šaką — *kombinatorika.*

Išnagrinėkime keletą pavyzdžių, kurie padės apibrėžti pagrindines kombinatorikos sąvokas.

Pavyzdžiai. 1. 10 turistų grupei reikia išsirinkti vadovą, virėją ir budintį. Apskaičiuosime, keliais būdais tai galima padaryti.

Iš 10 žmonių vadovą galima išrinkti 10 būdų. Iš likusių 9 žmonių virėją galima išrinkti 9 būdais. Taigi vadovą ir virėją galima išrinkti $10\cdot 9=90$ būdų. Iš likusių 8 žmonių budintį galima išrinkti 8 būdais. Vadinasi, vadovą, virėją ir budintį galima išrinkti $90\cdot 8=720$ būdų.

2. Apskaičiuosime, keliais būdais už 5 vietų pietų stalo gali susėsti 5 žmonės.

Vietas pažymėkime skaičiais 1, 2, 3, 4, 5. 1-ąją vietą galima užimti 5 būdais, 2-ąją — 4 būdais. Taigi 1-ąją ir 2-ąją vietas galima užimti $5\cdot 4=20$ būdų. 3-ąją vietą likę 3 svečiai gali užimti 3 skirtingais būdais ir t. t. Vadinasi, 5 svečiai už 5 vietų stalo gali susėsti $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ skirtingų būdų.

3. Algis, Jonas, Petras ir Balys nusipirko 3 bilietus į kiną. Apskaičiuosime, keliais būdais jie gali pasidalyti tuos bilietus.

Į kiną gali eiti *AJP, AJB, APB* ir *JPB*. Taigi į kiną galima eiti 4 skirtingais būdais.

Nagrinėtuose pavyzdžiuose, išskirdami grupes, vadovavomės skirtingais principais. Pirmajame pavyzdyje kiekvienoje išskirtoje grupėje buvo svarbi tvarka, o trečiajame pavyzdyje į tvarką nekreipėme dėmesio. Juk nėra jokio skirtumo, ar į kiną eis Jonas, Algis ir Balys, ar Balys, Jonas ir Algis. Antrajame pavyzdyje dėmesį kreipėme tik į tvarką.

Junginiai, sudaryti iš n elementų po m elementų, vadinami *gretiniais,* jeigu jie skiriasi vienas nuo kito bent vienu elementu arba yra sudaryti iš tų pačių elementų, bet skiriasi elementų išdėstymo tvarka.

Gretinių iš n elementų po m elementų skaičių žymėsime A_n^m.

Teorema. *Gretinių iš n elementų po m elementų skaičius yra lygus m paeiliui einančių natūraliųjų skaičių nuo n iki* $n-m+1$ *sandaugai, t. y.*

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).} \qquad (1)$$

Į r o d y m a s. Sudarant gretinius iš n elementų po m, tenka iš n elementų kaskart išrinkti po m elementų. Pirmąjį elementą galima parinkti n būdų. Iš likusių $n-1$ elemento antrąjį elementą galima parinkti $n-1$ būdu. Todėl parinkti pirmąjį ir antrąjį elementus yra $n(n-1)$ būdų. Trečiąjį elementą jau reikia rinkti iš $n-2$ elementų. Tai padaryti galima $n-2$ būdais. Tuomet pirmųjų trijų elementų trejetą galima parinkti $n(n-1)(n-2)$ būdų. Paskutinį m-ąjį elementą reikia rinkti, kai jau parinktas $m-1$ elementas. Tai padaryti galima $n-(m-1)$ būdų. Taigi

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

(1) formulę užrašysime kitaip. n skaičių sandaugą $1\cdot2\cdot3\cdots\times(n-1)\cdot n$ žymėsime $n!$ (skaitysime: „n faktorialas“). Pavyzdžiui, $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. (1) formulės dešiniąją pusę padauginę ir padalija iš $(n-m)!$, gauname:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots2\cdot1}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Laikysime, kad $A_n^0 = A_0^0 = 1$ ir $0! = 1$. Tada (2) formulė bus teisinga ir su n, m reikšmėmis, lygiomis 0.

Pavyzdžiai. 4. Teniso turnyre dalyvauja 12 sportininkų. Apskaičiuosime, keliais būdais gali pasiskirstyti aukso, sidabro ir bronzos medaliai.

22. Užsak. Nr. 284.

Šiame uždavinyje svarbi medalių kokybė, todėl reikia skaičiuoti gretinius iš 12 elementų po 3. Pagal (1) formulę

$$A_{12}^{3}=12\cdot 11\cdot 10=1320.$$

Taigi medaliai gali pasiskirstyti 1320 būdų.

5. Apskaičiuosime, kiek triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, kad kiekviename skaičiuje skaitmenys būtų skirtingi.

Iš 5 skaitmenų po 3 galima sudaryti A_5^3 skaičių. Iš jų reikia pašalinti skaičius, kurių pirmasis skaitmuo 0. Tokių skaičių yra A_4^2. Vadinasi, triženklių skaičių yra

$$A_5^3-A_4^2=5\cdot 4\cdot 3-4\cdot 3=60-12=48.$$

6. Išspręsime lygtį $A_{n+2}^4=5A_{n+1}^3$.

Pagal (1) formulę

$$(n+2)(n+1)n(n-1)=5(n+1)n(n-1).$$

Kadangi $n+2\geqslant 4$ ir $n+1\geqslant 3$, t. y. $n\geqslant 2$, tai $n-1\neq 0$. Abi lygties puses padalíję iš $(n+1)n(n-1)$, gauname

$$n+2=5, \text{ arba } n=3.$$

Jeigu (1) formulėje imsime $m=n$, tai A_n^n bus skaičius gretinių, kurie vienas nuo kito skiriasi tik elementų tvarka. Tokie gretiniai vadinami *kėliniais*. Jų skaičių žymėsime P_n.

Iš (2) formulės išplaukia, kad

$$\boxed{P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!.} \qquad (3)$$

7 pavyzdys. Apskaičiuosime, kiek šešiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Aišku, kad 0 negali būti pirmoje šešiaženklio skaičiaus vietoje, todėl iš duotųjų skaitmenų galima sudaryti

$$P_6-P_5=6!-5!=5!(6-1)=5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=600$$

šešiaženklių skaičių.

Gretiniai iš n elementų po m, kurie vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu, vadinami *deriniais*.

Derinių, sudarytų iš n elementų po m, skaičių žymėsime C_n^m. Iš kiekvieno to derinio galima sudaryti P_m kėlinių. Todėl

$$P_m\cdot C_n^m=A_n^m.$$

Iš čia

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \quad (4)$$

Įrodysime dvi svarbias derinių savybes:

1. $$C_n^m=C_n^{n-m}. \quad (5)$$

Iš tikrųjų

$$C_n^{n-m}=\frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}}=\frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}=C_n^m.$$

Ši savybė taikoma skaičiuojant C_n^m, kai $m>\frac{n}{2}$.

2. $$C_{n+1}^{m+1}=C_n^{m+1}+C_n^m. \quad (6)$$

Pagal (4) formulę

$$C_n^{m+1}+C_n^m=\frac{n!}{(n-m-1)!(m+1)!}+\frac{n!}{(n-m)!m!}=$$

$$=\frac{n!(n-m)}{(n-m)!(m+1)!}+\frac{n!(m+1)}{(n-m)!(m+1)!}=\frac{n!}{(n-m)!(m+1)!}(n-m+m+1)=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!}=C_{n+1}^{m+1}.$$

Pavyzdžiai. 8. Apskaičiuosime C_{20}^{17}. Pagal (5) formulę

$$C_{20}^{17}=C_{20}^{20-17}=C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140.$$

9. Apskaičiuosime, keliais būdais 20 žmonių grupei galima paskirti 4 vienodus kelialapius.

Kadangi kelialapiai vienodi, tai jų paskyrimo eilė nesvarbi. Taigi turime skaičiuoti derinius iš 20 elementų po 4 elementus:

$$C_{20}^4=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=4845.$$

10. Susirinkime dalyvauja 40 žmonių. Apskaičiuosime, keliais būdais galima išrinkti 5 žmones: susirinkimo pirmininką, sekretorių ir 3 balsų skaičiavimo komisijos narius.

Renkant pirmininką ir sekretorių, svarbu koks žmogus kokioms pareigoms renkamas. Taigi pirmininką ir sekretorių galima išrinkti A_{40}^2 būdų. Iš likusių 38 žmonių reikia išrinkti 3 balsų skaičiavimo komisijos narius, šiuo atveju eiliškumas nesvarbu. Todėl balsų skaičiavimo komisiją galima išrinkti C_{38}^3 būdų. Derinant pirmininko, sekretoriaus ir balsų skaičiavimo komisijos narių rin-

kimą, 5 žmonių grupę galima išrinkti $A_{40}^{2} \cdot C_{38}^{3} = 40 \cdot 39 \cdot \frac{38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13160160$ būdų.

11. Apskaičiuosime, keliais būdais iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, galima ištraukti 6 kortas, kad tarp jų būtų 2 tūzai.

Iš 4 tūzų 2 tūzus galima ištraukti C_4^2 būdų. Iš likusių 32 kortų 4 kortas galima ištraukti C_{32}^{4} būdų. Derindami šias galimybes, gauname $C_4^2 \cdot C_{32}^{4} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 215760$ būdų.

12. Išspręsime lygtį $A_{x+1}^{3} + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$.

Pastebėję, kad $C_{x+1}^{x-1} = C_{x+1}^{2}$, lygtį pertvarkome šitaip:

$$(x+1)x(x-1) + \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2} = 14(x+1).$$

Kadangi $x \in N$, tai $x+1 \neq 0$, ir ši lygtis ekvivalenti lygčiai

$$x(x-1) + \frac{x}{2} = 14,$$

turinčiai vienintelį natūralųjį sprendinį $x=4$.

13. Išspręsime nelygybę $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leqslant 100$.

Remdamiesi (5) formule, tą nelygybę perrašome šitaip:

$$C_{n+1}^{3} - C_{n+1}^{2} \leqslant 100.$$

Iš čia pagal (4) formulę

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \leqslant 100,$$

arba

$$n^3 - 3n^2 - 4n - 600 \leqslant 0. \qquad (7)$$

Iš sąlygos išplaukia, kad $n-2 \geqslant 0$ ir $n-1 \geqslant 0$, t. y. $n \geqslant 2$. Taigi ieškosime natūraliųjų skaičių, ne mažesnių už 2 ir tenkinančių (7) nelygybę. Nesunku įsitikinti, kad tik skaičiai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tenkina tą nelygybę.

Remdamiesi pagrindinėmis kombinatorikos formulėmis, išspręsime keletą sudėtingesnių tikimybių skaičiavimo uždavinių.

Pavyzdžiai. 14. Iš raidžių rinkinio sudėtas žodis *S A U L Ė*. Rasime tikimybę, kad sumaišę šias raides ir vėl atsitiktinai sudėję į eilę gausime tą patį žodį.

Iš 5 skirtingų raidžių galima sudaryti $P_5 = 120$ skirtingų žodžių. Vadinasi, elementariųjų įvykių erdvė susideda iš 120 įvykių, o palankių tiriamajam įvykiui yra tik vienas. Todėl tikimybė, kad vėl bus sudėtas žodis *SAULĖ* yra

$$P = \frac{1}{120}.$$

15. Iš 5 kortelių, pažymėtų raidėmis *A*, *B*, *C*, *O*, *N*, atsitiktinai imamos trys raidės po vieną raidę ir dedamos į vieną eilę. Apskaičiuosime tikimybę, kad bus sudėtas žodis *ONA*.

Sudarant žodžius, svarbi raidžių tvarka. Iš 5 raidžių po 3 raides galima sudaryti A_5^3 skirtingų žodžių. Tarp jų bus vienintelis žodis *ONA*. Todėl ieškomoji tikimybė lygi

$$P=\frac{1}{A_5^3}=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{60}.$$

16. Iš kortelių, iš kurių ant kiekvienos parašyta po raidę, sudėtas žodis *MATEMATIKA*. Kortelės sumaišomos, po to atsitiktinai imamos po vieną ir dedamos į eilę. Apskaičiuosime tikimybę, kad bus sudėtas žodis *MATEMATIKA*.

Kadangi yra 10 kortelių, tai elementariųjų įvykių erdvė susidės iš $n=P_{10}=10!$ įvykių. Žodyje *MATEMATIKA* yra pasikartojančių raidžių (*M* — 2 kartus, *A* — 3 kartus ir *T* — 2 kartus). Keičiant vienodas raides vietomis, pats žodis nesikeičia. Vadinasi, yra $m=2!\cdot 3!\cdot 2!=24$ palankūs įvykiai. Ieškomoji tikimybė lygi

$$P=\frac{m}{n}=\frac{24}{10!}=\frac{1}{151200}.$$

17. Egzaminų programoje yra 45 klausimai. Studentas išmoko 30 klausimų. Apskaičiuosime tikimybę, kad jis ištrauks bilietą (biliete 3 klausimai), kurio visus klausimus mokės.

Iš 45 klausimų galima sudaryti $n=C_{45}^3$ bilietų. Studentui laimingų bilietų yra $m=C_{30}^3$. Todėl tikimybė, kad studentas ištrauks laimingą bilietą lygi

$$P=\frac{C_{30}^3}{C_{45}^3}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{45\cdot 44\cdot 43}=0{,}286.$$

18. Mokytojų kolektyve yra 20 moterų ir 10 vyrų. Į komisiją atsitiktinai išrinkti 5 mokytojai. Apskaičiuosime tikimybę, kad: a) į komisiją pateko tik moterys; b) į komisiją pateko 2 vyrai ir 3 moterys.

Iš 30 mokytojų 5 žmonių komisiją galima sudaryti $n=C_{30}^5$ būdų.

a) 5 moteris iš 20 moterų galima išrinkti $m=C_{20}^5$ būdų. Todėl tikimybė, kad komisijoje bus vien moterys, lygi

$$P=\frac{C_{20}^5}{C_{30}^5}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}=0{,}109;$$

b) 2 vyrus iš 10 vyrų galima išrinkti C_{10}^2 būdų, o 3 moteris iš 20 moterų — C_{20}^3 būdų. Taigi komisiją, kurioje būtų 2 vyrai ir 3 moterys, galima sudaryti $m=C_{10}^2 \cdot C_{20}^3$ būdų. Tokios komisijos tikimybė lygi

$$P=\frac{C_{10}^2 \cdot C_{20}^3}{C_{30}^5}=0{,}360.$$

19. Apskaičiuosime tikimybę, jog 7 žmonės atsitiktinai taip susės už stalo, kad 3 draugai sėdės greta.

7 žmonės už stalo gali susėsti $n=P_7=7!$ skirtingų būdų. Tris draugus už stalo pasodinti greta galima P_5 būdų (greta 3 draugai ir dar 4 likę žmonės). Tarpusavyje 3 draugai gali susėsti P_3 skirtingų būdų. Taigi palankių atvejų yra $m=P_5 \cdot P_3$. Ieškomoji tikimybė lygi

$$P=\frac{m}{n}=\frac{P_5 \cdot P_3}{P_7}=\frac{5! \cdot 3!}{7!}=0{,}143.$$

20. Dėžėje yra 13 žalių, 10 raudonų ir 7 mėlyni rutuliai. Apskaičiuosime tikimybę, kad tarp atsitiktinai išimtų 8 rutulių bus 3 žali, 2 raudoni ir 3 mėlyni.

Dėžėje yra 30 rutulių. Iš jų 8 rutulius galima išimti $n=C_{30}^8$ būdų. Palankūs bus tik tokie atvejai, kai tarp 8 rutulių bus 3 žali, 2 raudoni ir 3 mėlyni rutuliai. Iš 13 žalių rutulių 3 rutulius galima išimti C_{13}^3 būdų, o 2 raudonus rutulius iš 10 — C_{10}^2 būdų. 3 mėlynus rutulius iš 7 galima išimti C_7^3 būdų. Taigi yra $m=$ $=C_{13}^3 \cdot C_{10}^2 \cdot C_7^3$ palankių žalių, raudonų ir mėlynų rutulių parinkimo būdų. Ieškomoji tikimybė lygi

$$P=\frac{m}{n}=\frac{C_{13}^3 \cdot C_{10}^2 \cdot C_7^3}{C_{30}^8}=0{,}077.$$

11.5. Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė

Dviejų įvykių A ir B suma vadinsime įvykį C, kuris reiškia, kad įvyko bent vienas iš įvykių A ir B. Žymėsime $C=A \cup B$.

Pavyzdžiai. 1. Jeigu įvykis A yra „Metus kauliuką, atsivertė 1 akutė“ ir įvykis B —„Metus kauliuką, atsivertė 2 akutės“, tai įvykis C —„Metus kauliuką, atsivertė ne daugiau kaip 2 akutės“ yra įvykių A ir B suma.

2. Jeigu įvykis A yra „Metus dvi monetas, atsivertė abu herbai“ ir įvykis B —„Metus dvi monetas, atsivertė vienas herbas ir vienas

skaičius", tai tų įvykių suma yra įvykis C — „Metus dvi monetas, atsivertė bent vienas herbas".

Įvykių $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ suma vadinsime įvykį A, kuris reiškia, kad įvyko bent vienas iš įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Nagrinėsime įvykius: A_1 — „Atsivertė 1 akutė", A_3 — „Atsivertė 3 akutės" ir A_5 — „Atsivertė 5 akutės". Šių įvykių suma yra įvykis A — „Atsivertė nelyginis akučių skaičius".

1 teorema. *Dviejų nesutaikomų įvykių A ir B tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai:*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).} \qquad (1)$$

Įrodymas. Sakykime, m — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, k — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui B, o n — elementariųjų įvykių erdvės įvykių skaičius. Tada $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$. Kadangi įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai įvykis $A \cup B$ reiškia, kad įvyko arba tik A, arba tik B. Šiam įvykiui palankių elementariųjų įvykių yra $m+k$. Todėl

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Išvada. *Baigtinio skaičiaus nesutaikomų įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sumos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai, t. y.*

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).} \qquad (2)$$

Šios išvados neįrodinėsime.

Pavyzdžiai. 4. Dėžėje yra 30 vienodų rutulių: 10 raudonų, 5 balti, 7 juodi ir 8 mėlyni. Apskaičiuosime įvykio C — „Atsitiktinai iš dėžės išimtas rutulys yra baltas arba mėlynas" tikimybę.

Įvykis C įvyks, jeigu įvyks bent vienas iš įvykių: A — „Išimtas rutulys baltas" ir B — „Išimtas rutulys mėlynas". Akivaizdu, kad įvykiai A ir B nesutaikomi ir $C = A \cup B$. Todėl pagal (1) formulę $P(C) = P(A) + P(B)$. Kadangi $P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, tai

$$P(C) = \frac{1}{6} + \frac{4}{15} = \frac{13}{30}.$$

5. Lentynoje yra 10 algebros ir 5 geometrijos knygos. Apskaičiuosime tikimybę, kad tarp 3 atsitiktinai paimtų knygų yra bent viena geometrijos knyga (įvykis A).

Nagrinėsime įvykius: A_1 —„Paimta viena geometrijos ir dvi algebros knygos“, A_2 —„Paimtos dvi geometrijos ir viena algebros knyga“ ir A_3 —„Paimtos 3 geometrijos knygos“. Įvykiai A_1, A_2, A_3 yra nesutaikomi ir $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Todėl $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Kadangi $P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}$, $P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}$, $P(A_3) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}$, tai

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}.$$

2 teorema. *Jeigu įvykiai* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sudaro pilnąją nesutaikomų įvykių erdvę, tai jų tikimybių suma lygi* 1, *t. y.*

$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.} \qquad (3)$$

Į r o d y m a s. Kadangi pagal pilnosios įvykių erdvės apibrėžimą

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = U \text{ (būtinasis įvykis)},$$

tai

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(U) = 1.$$

Kita vertus,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

6 pavyzdys. Iš sandėlio prekės vežamos į parduotuves A, B ir C. Tikimybė, kad prekių siunta bus atvežta į parduotuvę A, lygi 0,3, į parduotuvę B — 0,45. Apskaičiuosime, su kokia tikimybe prekės gali būti atvežtos į parduotuvę C.

Įvykiai „Prekės atvežtos į parduotuvę A“, „Prekės atvežtos į parduotuvę B“ ir „Prekės atvežtos į parduotuvę C“ yra nesutaikomi ir sudaro pilnąją įvykių erdvę. Sakykime, kad tikimybė prekių siuntai patekti į parduotuvę C lygi p. Tuomet pagal (3) formulę

$$0{,}3 + 0{,}45 + p = 1.$$

Iš čia

$$p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

3 teorema. *Priešingų įvykių tikimybių suma lygi* 1:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1.} \qquad (4)$$

Į r o d y m a s. Įvykiai A ir $\bar{A}$ yra nesutaikomi ir sudaro pilnąją įvykių erdvę. Pagal 2 teoremą tų įvykių tikimybių suma lygi 1.

Kartais įvykio A tikimybę skaičiuoti daug sunkiau negu jam priešingo įvykio $\bar{A}$. Tuomet skaičiuojama įvykio $\bar{A}$ tikimybė ir pagal (4) formulę randama įvykio A tikimybė.

Pavyzdžiai. 7. Dėžėje yra 8 balti ir 12 raudonų rutulių. Apskaičiuosime įvykio A —„Iš atsitiktinai išimtų iš dėžės 5 rutulių bent vienas yra baltas" tikimybę. Įvykiui A priešingas įvykis $\bar{A}$ —„Nė vienas iš 5 išimtų rutulių nėra baltas". Iš 20 rutulių, imant po 5, galima sudaryti $n = C_{20}^5$ skirtingų kombinacijų. Įvykiui $\bar{A}$ palankių įvykių yra $m = C_{12}^5$. Todėl

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{12}^5}{C_{20}^5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = 0{,}051.$$

Pasinaudoję (4) formule, gauname

$$P(A) = 1 - 0{,}051 = 0{,}949.$$

8. Ant kortelių surašyti skaičiai nuo 100 iki 999. Apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinai paimtoje kortelėje sutaps bent du skaitmenys.

Šio bandymo įvykių erdvės elementariųjų įvykių skaičius yra $n = 900$ (900 kortelių). Nagrinėsime įvykį A —„Paimtos kortelės skaičiaus sutampa bent du skaitmenys". Gali sutapti arba du, arba visi trys šio skaičiaus skaitmenys. Tačiau paprasčiau skaičiuoti priešingo įvykio $\bar{A}$ —„Paimtos kortelės skaičiaus visi skaitmenys skirtingi" tikimybę. Visoje įvykių erdvėje įvykiui $\bar{A}$ palankių įvykių yra $m = A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9 \cdot 9 \cdot 8$ (čia A_{10}^3 — triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis skaičius, o A_9^2 — triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis, kurių pirmasis skaitmuo — nulis, skaičius).

Taigi

$$P(\bar{A}) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{900} = 0{,}72$$

ir

$$P(A) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28.$$

11.6. Tikimybių sandaugos teoremos

Dviejų įvykių A ir B sandauga vadinsime įvykį C, kuris reiškia, jog įvyko abu įvykiai A ir B. Žymėsime $C = A \cap B$.

1 pavyzdys. Įvykio A —„Metus kauliuką, atsivertė lyginis akučių skaičius" ir įvykio B —„Metus kauliuką, atsivertė akučių skai-

čius, dalus iš 3" sandauga yra įvykis C —„Metus kauliuką, atsivertė 6 akutės".

Keleto įvykių sandauga vadinsime įvykį, kuris reiškia, jog įvyko visi minėtieji įvykiai.

Du įvykius A ir B vadinsime *nepriklausomais,* jeigu vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, įvyko ar neįvyko kitas įvykis. Priešingu atveju tie įvykiai vadinami *priklausomais.*

Pavyzdžiai. 2. Metami du lošimo kauliukai. Nagrinėsime įvykius: A —„Pirmasis kauliukas atsivertė sienele su 3 akutėmis" ir B —„Antrasis kauliukas atsivertė sienele su lyginiu akučių skaičiumi". Akivaizdu, kad $P(A)=\frac{1}{6}$, nepriklausomai nuo antrojo kauliuko metimo rezultato, o $P(B)=\frac{1}{2}$, nepriklausomai nuo to, koks rezultatas gautas metus pirmąjį kauliuką. Vadinasi, įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

3. Dėžėje yra 5 raudoni ir 3 žali rutuliukai. Iš dėžės du kartus imama po vieną rutuliuką, jų negrąžinant į dėžę. Nagrinėsime įvykius: A —„Pirmasis rutuliukas yra raudonas" ir B —„Antrasis rutuliukas yra raudonas".

Suprantama, kad $P(A)=\frac{5}{8}$. Įvykio B tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko įvykis A, ar neįvyko. Jeigu įvykis A įvyko, tai dėžėje liko 4 raudoni rutuliukai ir $P(B)=\frac{4}{7}$. Jeigu įvykis A neįvyko, tai $P(B)=\frac{5}{7}$. Matome, kad įvykiai A ir B yra priklausomi.

1 teorema. *Sutaikomų nepriklausomų įvykių A ir B sandaugos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai, t. y.*

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).} \tag{1}$$

Į r o d y m a s. Sakykime, n yra elementariųjų įvykių erdvės įvykių skaičius, m — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, o p — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui B. Tuomet įvykiui $A\cap B$ yra $m\cdot p$ palankių elementariųjų įvykių. Kadangi įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai bendras vienodai galimų įvykių, kuriems vykstant gali įvykti įvykis $A\cap B$, skaičius yra n^2. Todėl

$$P(A\cap B)=\frac{m\cdot p}{n^2}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{n}=P(A)\cdot P(B).$$

Jeigu įvykiai A ir B nesutaikomi, tai $A\cap B=V$ ir $P(A\cap B)=$ $=P(V)=0$. Taigi *nesutaikomų įvykių sandaugos tikimybė lygi nuliui.*

4 pavyzdys. Į taikinį vienu metu šauna du šauliai. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė yra 0,8, o antrojo — 0,75. Apskaičiuosime įvykio C — „Pataikė abu šauliai" tikimybę.

Įvykis C yra įvykių A — „Pataikė pirmasis šaulys" ir B — „Pataikė antrasis šaulys" sandauga. Įvykiai A ir B yra sutaikomi ir nepriklausomi. Todėl

$$P(C)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}6.$$

Įvykius $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n>2$) vadinsime *nepriklausomais,* jeigu kiekvienas iš tų įvykių ir įvykis, lygus likusių įvykių sandaugai, yra nepriklausomi.

2 teorema. *Sutaikomų ir nepriklausomų įvykių* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sandaugos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai:*

$$\boxed{P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n).} \qquad (2)$$

Šios teoremos neįrodinėsime.

Pavyzdžiai. 5. Trijose dėžėse yra po 10 rutulių. Pirmojoje dėžėje yra 8 raudoni ir 2 balti rutuliai, antrojoje — 6 raudoni ir 4 balti rutuliai ir trečiojoje dėžėje — 4 raudoni ir 6 balti rutuliai. Apskaičiuosime tikimybę, kad iš kiekvienos dėžės atsitiktinai ištraukus po vieną rutulį visi trys rutuliai bus raudoni.

Tikimybė, kad iš pirmosios dėžės ištrauktas raudonas rutulys (įvykis A), lygi $P(A)=\frac{8}{10}$. Iš antrosios dėžės raudoną rutulį (įvykis B) galima ištraukti su tikimybe $P(B)=\frac{6}{10}$, o iš trečiosios dėžės (įvykis C) — su tikimybe $P(C)=\frac{4}{10}$. Įvykiai A, B ir C yra sutaikomi ir nepriklausomi, todėl

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}192.$$

6. Trys šauliai šauna po vieną kartą į taikinį. Apskaičiuosime įvykio A — „Bent vienas šaulys pataikė į taikinį" tikimybę, jei pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,7, o antrojo — 0,6 ir trečiojo — 0,8.

Nagrinėsime tris įvykius: A_1 — „Pirmasis šaulys pataikė į taikinį", A_2 — „Antrasis šaulys pataikė į taikinį" ir A_3 — „Trečiasis šaulys pataikė į taikinį". Tuomet $P(A_1)=0{,}7$, $P(A_2)=0{,}6$ ir $P(A_3)=0{,}8$. Lengviau apskaičiuoti tikimybę priešingo įvykio $\bar{A}$ — „Visi šauliai nė karto nepataikė į taikinį". Įvykiai $\bar{A}_1$ — „Pirmasis šaulys nepataikė į taikinį", $\bar{A}_2$ — „Antrasis šaulys nepataikė į taikinį" ir $\bar{A}_3$ — „Trečiasis šaulys nepataikė į taikinį" yra sutaikomi ir

nepriklausomi. Be to, $\bar{A}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3$. Kadangi $P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=$ $=1-0{,}7=0{,}3$, $P(\bar{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}6=0{,}4$, $P(\bar{A}_3)=1-P(A_3)=$ $=1-0{,}8=0{,}2$ ir

$$P(\bar{A})=P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}024,$$

tai

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}024=0{,}976.$$

7. Medžiotojas šauna į tolstantį taikinį. Tikimybė pataikyti į jį pirmuoju šūviu lygi 0,4 ir sumažėja 0,1 su kiekvienu kitu šūviu. Apskaičiuosime įvykio A —„Iš trijų šūvių į taikinį pataikyta 2 kartus" tikimybę.

Sakykime, A_1, A_2, A_3 — įvykiai, reiškiantys, jog pataikyta į taikinį atitinkamai pirmuoju, antruoju ir trečiuoju šūviais. Tuomet įvykį A galima užrašyti šitaip:

$$A=(A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3)\cup(A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)\cup(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3).$$

Įvykiai $A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3$, $A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3$ ir $\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3$ yra nesutaikomi, o įvykiai A_1, A_2, A_3, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ — nepriklausomi. Todėl

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)+$$
$$+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3).$$

Kadangi $P(A_1)=0{,}4$, $P(A_2)=0{,}3$, $P(A_3)=0{,}2$, $P(\bar{A}_1)=1-0{,}4=$ $=0{,}6$, $P(\bar{A}_2)=1-0{,}3=0{,}7$ ir $P(\bar{A}_3)=1-0{,}2=0{,}8$, tai

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}188.$$

8. Pirmojoje dėžėje yra 6 balti ir 4 juodi rutuliai, o antrojoje — 5 balti ir 7 juodi rutuliai. Iš pirmosios dėžės atsitiktinai imami 3 rutuliai, iš antrosios — du rutuliai. Apskaičiuosime tikimybę:

a) įvykio A_1 —„Visi išimti rutuliai vienodos spalvos";

b) įvykio A_2 —„Tarp išimtų rutulių tik trys yra juodi";

c) įvykio A_3 —„Tarp išimtų rutulių yra bent vienas juodas".

Pirmojoje dėžėje yra 10 rutulių ir iš jų tris rutulius galima išimti $n_1=C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ skirtingų būdų, iš antrosios dėžės (12 rutulių) 2 rutulius galima išimti $n_2=C_{12}^2=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66$ skirtingais būdais.

Nagrinėsime galimus įvykius:

B_1 —„Iš pirmosios dėžės išimti 3 balti rutuliai",

B_2 —„Iš pirmosios dėžės išimti du balti ir vienas juodas rutulys",

B_3 —„Iš pirmosios dėžės išimti vienas baltas ir du juodi rutuliai",

B_4 —„Iš pirmosios dėžės išimti 3 juodi rutuliai",

C_1 —„Iš antrosios dėžės išimti 2 balti rutuliai",

C_2 —„Iš antrosios dėžės išimtas vienas baltas ir vienas juodas rutulys",

C_3 —„Iš antrosios dėžės išimti 2 juodi rutuliai".

a) Įvykis A_1 reiškia, kad išimti rutuliai yra arba balti, arba juodi. Vadinasi,

$$A_1 = (B_1 \cap C_1) \cup (B_4 \cap C_3).$$

Kadangi įvykiai $B_1 \cap C_1$ ir $B_4 \cap C_3$ yra nesutaikomi, o įvykiai B_1, C_1, B_4, C_3 — nepriklausomi, tai

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_4) \cdot P(C_3).$$

Rasime įvykiams B_i $(i=1, 2, 3, 4)$ ir C_k $(k=1, 2, 3)$ palankių elementariųjų įvykių skaičių.

Įvykiui B_1 yra $m_{11} = C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ palankių elementariųjų įvykių, įvykiui B_2 — $m_{21} = C_6^2 \cdot C_4^1 = 60$, įvykiui B_3 — $m_{31} = C_6^1 \cdot C_4^2 = 36$; įvykiui B_4 — $m_{41} = C_4^3 = 4$, įvykiui C_1 — $m_{12} = C_5^2 = 10$, įvykiui C_2 — $m_{22} = C_5^1 \cdot C_7^1 = 35$ ir įvykiui C_3 yra $m_{32} = C_7^2 = 21$ palankus elementarusis įvykis.

Vadinasi,

$$P(A_1) = \frac{20}{120} \cdot \frac{10}{66} + \frac{4}{120} \cdot \frac{21}{66} = \frac{50}{1980} + \frac{21}{1980} = \frac{71}{1980} = 0{,}036;$$

b) Įvykį A_2 galima užrašyti šitaip:

$$A_2 = (B_4 \cap C_1) \cup (B_2 \cap C_3) \cup (B_3 \cap C_2).$$

Todėl

$$P(A_2) = \frac{4}{120} \cdot \frac{10}{66} + \frac{60}{120} \cdot \frac{21}{66} + \frac{36}{120} \cdot \frac{35}{66} = \frac{32}{99} = 0{,}3232;$$

c) Paprasčiau skaičiuoti įvykiui A_3 priešingo įvykio $\bar{A}_3$ —„Tarp išimtų rutulių nėra nė vieno juodo rutulio" tikimybę.

Kadangi

$$\bar{A}_3 = B_1 \cap C_1,$$

tai

$$P(\bar{A}_3) = P(B_1) \cdot P(C_1) = \frac{20}{120} \cdot \frac{10}{66} = \frac{5}{198} = 0{,}025$$

ir

$$P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{5}{198} = \frac{193}{198} = 0{,}975.$$

11.7. Sutaikomų įvykių sumos tikimybė

11.5 skyrelyje įrodėme teoremą apie nesutaikomų įvykių sumos tikimybę. Ši teorema neteisinga, kai įvykiai yra sutaikomi.

1 pavyzdys. Dviejose dėžėse yra po 10 vienodų detalių. Pirmojoje dėžėje yra 8 standartinės detalės, antrojoje dėžėje — 7 standartinės detalės. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai imama po vieną detalę. Apskaičiuosime įvykio C — „Bent viena iš paimtų detalių yra standartinė“ tikimybę.

Nagrinėsime įvykius A — „Iš pirmosios dėžės išimta detalė yra standartinė“ ir B — „Iš antrosios dėžės išimta detalė yra standartinė“. Aišku, kad $C = A \cup B$. Kadangi $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}7$, tai pritaikę 11.5 skyrelio (1) formulę gautume

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 = 1{,}5.$$

Tačiau bet kokio įvykio tikimybė negali būti didesnė už 1. Įsitikinome, kad minėtoji formulė sutaikomiems įvykiams netinka.

Teorema. *Sutaikomų įvykių A ir B sumos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai be tikimybės šiems įvykiams įvykti kartu, t. y.*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).} \qquad (1)$$

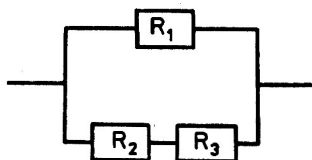
Į r o d y m a s. Sakykime, m yra skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, p — skaičius elementariųjų įvykių, palankių įvykiui B. Be to, sakykime, kad tarp $m+p$ elementariųjų įvykių yra q įvykių, palankių ir įvykiui A, ir įvykiui B. Jeigu n yra elementariųjų įvykių erdvės įvykių skaičius, tai $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{p}{n}$, $P(A \cap B) = \frac{q}{n}$. Pagal sutaikomų įvykių sumos prasmę $A \cup B$ reiškia, kad įvyko bent vienas iš įvykių A ir B. Šiuo atveju įvykiui $A \cup B$ palankių elementariųjų įvykių yra $m+p-q$. Todėl

$$P(A \cup B) = \frac{m+p-q}{n} = \frac{m}{n} + \frac{p}{n} - \frac{q}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pirmajame pavyzdyje nagrinėto įvykio tikimybę apskaičiuosime pagal (1) formulę. Įvykiai A ir B yra sutaikomi ir nepriklausomi, todėl $P(A \cap B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$ ir $P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

P a s t a b a. Šį uždavinį galėjome spręsti ir remdamiesi formule

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$



181 pav.

Iš čia $P(A\cup B)=1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$. Kadangi $P(\bar{A})=1-P(A)=$ $=1-0{,}8=0{,}2$, $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}7=0{,}3$, tai $P(A\cup B)=$ $=1-0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}94$.

2 pavyzdys. Tikimybė, kad 181 paveiksle pavaizduotos grandinės rezistorius R_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ sudegs per laiką t, atitinkamai lygi $0,i$. Apskaičiuosime įvykio A —„Per laiką t grandinėje nutrūks elektros srovė" tikimybę.

Nagrinėsime įvykius: A_1 —„Sudegė rezistorius R_1", A_2 —„Sudegė rezistorius R_2" ir A_3 —„Sudegė R_3". Tuomet įvykį A galime užrašyti šitaip:

$$A=A_1\cap(A_2\cup A_3).$$

Įvykiai A_1 ir $A_2\cup A_3$ yra nepriklausomi, o įvykiai A_1, A_2, A_3 — sutaikomi, todėl

$$P(A)=P(A_1)\,(P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3))=$$
$$=0{,}1\,(0{,}2+0{,}3-0{,}2\cdot 0{,}3)=0{,}044.$$

11.8. Sąlyginė tikimybė. Pilnosios tikimybės formulė. Bejeso* formulė

Jeigu įvykiai A ir B yra priklausomi, tai įvykį „Įvyko B, jei įvyko A" žymėsime B/A. Šio įvykio tikimybę $P(B/A)$ vadinsime įvykio B *sąlygine tikimybe* (priklausančia nuo įvykio A). Išvesime formulę tokiai tikimybei skaičiuoti.

Jeigu m — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, p — skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui $A\cap B$, n — elementariųjų įvykių erdvės įvykių skaičius, tai

$$P(B/A)=\frac{p}{m}=\frac{p}{n}:\frac{m}{n}.$$

---

* Bayes Thomas (1702—1761) — anglų matematikas.

Kadangi $P(A \cap B)=\frac{p}{n}$, $P(A)=\frac{m}{n}$, tai

$$P(B/A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1}$$

Analogiškai galima įrodyti, kad

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2}$$

Iš (1) ir (2) formulių išplaukia, kad

$$\boxed{P(A \cap B)=P(A/B) \cdot P(B)=P(B/A) \cdot P(A),} \tag{3}$$

t. y. *priklausomų įvykių sandaugos tikimybė lygi vieno įvykio sąlyginei tikimybei, padaugintai iš tikimybės kito įvykio, nuo kurio priklauso pirmasis įvykis.*

Jeigu įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai $P(A/B)=P(A)$, $P(B/A)=P(B)$, ir (3) formulė sutampa su 11.6 skyrelio (1) formule.

Galima įrodyti, kad, kai yra n priklausomų įvykių A_1, A_2, ..., A_n, tenkinančių sąlygą $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, tada teisinga formulė

$$\boxed{\begin{gathered} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)= \\ =P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \end{gathered}} \tag{4}$$

Kai $n=3$, iš (4) formulės gauname

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2).} \tag{5}$$

Pavyzdžiai. 1. Iš 34 egzamino klausimų studentas traukia du kartus po vieną klausimą. Egzaminą studentas išlaiko, jeigu atsako bent į vieną klausimą. Apskaičiuosime tikimybę, kad studentas išlaikys egzaminą, jeigu jis gerai žino atsakymus tik į 30 klausimų ir pirmą kartą ištraukė „nelaimingą" klausimą.

Nagrinėsime įvykius A —„Studentas pirmą kartą ištraukė „nelaimingą" klausimą" ir B —„Studentas antrą kartą ištraukė „laimingą" klausimą". Studentas egzaminą išlaikys, jeigu įvyks įvykis $A \cap B$. Įvykiai A ir B yra priklausomi, todėl tikimybę $P(A \cap B)$ skaičiuosime pagal (3) formulę. Kadangi $P(A)=\frac{4}{34}$, $P(B/A)=$ $=\frac{30}{33}$, tai

$$P(A \cap B)=\frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33}=\frac{20}{187}=0{,}107.$$

2. Dėžėje yra 6 raudoni, 5 mėlyni ir 3 balti rutuliai. Paeiliui iš dėžės imami 3 rutuliai. Apskaičiuosime tikimybę, kad pirmasis išimtas rutulys yra raudonas (įvykis A), antrasis — mėlynas (įvykis B) ir trečiasis — baltas (įvykis C).

Reikia apskaičiuoti įvykio $A \cap B \cap C$ tikimybę. Kadangi šie įvykiai priklausomi, tai naudosimės (5) formule. Dėžėje yra 14 rutulių, todėl įvykio A tikimybė lygi $P(A)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$. Tikimybė, kad išimtas antrasis rutulys yra mėlynas, kai pirmasis išimtas raudonas rutulys, lygi $P(B/A)=\frac{5}{13}$. Ir pagaliau tikimybė, kad trečiasis išimtas rutulys yra baltas, kai pirmasis išimtas rutulys — raudonas, o antrasis — mėlynas, lygi $P(C/A \cap B)=\frac{3}{12}$. Vadinasi,

$$P(A \cap B \cap C)=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{12}=\frac{15}{364}=0{,}041.$$

Remdamiesi (3) formule, įrodysime vadinamąją *pilnosios tikimybės formulę.*

Teorema. *Įvykio A, galinčio įvykti kartu su vienu iš įvykių $H_1, H_2, \ldots, H_n$, sudarančių pilnąją įvykių erdvę, tikimybė lygi kiekvieno iš tų įvykių tikimybių ir atitinkamų įvykio A sąlyginių tikimybių sandaugų sumai, t. y.*

$$P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+ \\ +\cdots+P(A/H_n)\cdot P(H_n). \qquad (6)$$

Į r o d y m a s. Kadangi įvykis A gali įvykti tik kartu su vienu iš įvykių $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tai A įvyks, jeigu įvyks bent vienas iš įvykių $A \cap H_1, A \cap H_2, \ldots, A \cap H_n$. Taigi

$$A=(A \cap H_1)\cup(A \cap H_2)\cup\cdots\cup(A \cap H_n).$$

Įvykiai $A \cap H_1, A \cap H_2, \ldots, A \cap H_n$ yra nesutaikomi, todėl

$$P(A)=P(A \cap H_1)+P(A \cap H_2)+\cdots+P(A \cap H_n). \qquad (7)$$

Kadangi pagal (3) formulę $P(A \cap H_1)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)$, $P(A \cap H_2)=P(H_2)\cdot P(A/H_2), \ldots, P(A \cap H_n)=P(H_n)\cdot P(A/H_n)$, tai šias išraiškas įrašę į (7) lygybę gauname (6) formulę.

Įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vadinami *hipotezėmis.*

Pilnosios tikimybės formulė plačiai taikoma sprendžiant hipotezių tikimybinio vertinimo uždavinius. Remdamiesi šia formule, įrodysime vadinamąją *Bejeso formulę:*

$$\boxed{P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A/H_n)},} \qquad (8)$$

$i=1, 2, 3, \ldots, n.$

Iš tikrųjų iš lygybės

$$P(A\cap H_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)$$

išplaukia, kad

$$P(H_i/A)=\frac{P(A\cap H_i)}{P(A)}.$$

Iš čia, remdamiesi (3) ir (6) formulėmis, gauname (8) formulę.

Pavyzdžiai. 3. Iš 3 gamyklų į parduotuvę atvežė elektros lemputes. 25% visų lempučių pagaminta pirmojoje gamykloje, 35% lempučių — antrojoje gamykloje ir 40% — trečiojoje gamykloje. Tikimybė, kad pirmoji gamykla pagamino brokuotiną lemputę, lygi 0,01, antroji — 0,008 ir trečioji — 0,007. Apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinai paimta lemputė yra brokuotina.

Įvykiai H_1 —„Paimtoji lemputė pagaminta pirmojoje gamykloje", H_2 —„Paimtoji lemputė pagaminta antrojoje gamykloje" ir H_3 —„Paimtoji lemputė pagaminta trečiojoje gamykloje". Apskaičiuosime įvykio A —„Paimtoji lemputė yra brokuotina" tikimybę. Kadangi $P(H_1)=0{,}25$, $P(H_2)=0{,}35$, $P(H_3)=0{,}4$, $P(A/H_1)=0{,}01$, $P(A/H_2)=0{,}008$ ir $P(A/H_3)=0{,}007$, tai pagal (6) formulę ($n=3$) gauname

$$P(A)=0{,}25\cdot 0{,}01+0{,}35\cdot 0{,}008+0{,}4\cdot 0{,}007=0{,}0081.$$

4. Pirmojoje dėžėje yra 1 baltas ir 4 juodi rutuliai, antrojoje — 4 balti ir vienas juodas. Iš pirmosios dėžės atsitiktinai išimtas vienas rutulys ir įdėtas į antrąją dėžę. Po to iš antrosios dėžės atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Apskaičiuosime tikimybę, kad rutulys yra baltas.

Nagrinėsime įvykius H_1 —„Iš pirmosios dėžės į antrąją dėžę perdėtas baltas rutulys", H_2 —„Iš pirmosios dėžės į antrąją dėžę perdėtas juodas rutulys" ir A —„Iš antrosios dėžės išimtas rutulys yra baltas".

Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2).$$

Apskaičiuosime į šią formulę įeinančias tikimybes: $P(H_1)=\frac{1}{5}$, $P(H_2)=\frac{4}{5}$. $P(A/H_1)=\frac{5}{6}$ (perdėjus iš pirmosios dėžės į antrąją baltą rutulį, antrojoje dėžėje bus 6 rutuliai ir 5 iš jų balti), $P(A/H_2)=\frac{4}{6}$. Taigi

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}.$$

5. Skaitiklis registruoja α, β ir γ daleles. Dalelių pasirodymo tikimybės atitinkamai yra 0,2, 0,5 ir 0,3. Skaitiklis minėtas daleles registruoja atitinkamai su tikimybe 0,8, 0,2 ir 0,4. Skaitiklis užregistravo dalelę. Apskaičiuosime tikimybę, kad buvo užregistruota β dalelė.

Nagrinėsime įvykius: H_1 —„Pasirodė α dalelė“, H_2 —„Pasirodė β dalelė“, H_3 —„Pasirodė γ dalelė“ ir A —„Skaitiklis užregistravo dalelę“. Pagal sąlygą $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}5$, $P(H_3)=0{,}3$. Jeigu užregistruota dalelė yra α dalelė, tai $P(A/H_1)=0{,}8$; jeigu β, tai $P(A/H_2)=0{,}2$ ir jeigu γ, tai $P(A/H_3)=0{,}4$. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}38.$$

Iš (8) Bejeso formulės išplaukia:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}2}{0{,}38}=\frac{5}{19}.$$

6. Rasime tikimybę, kad 3 pavyzdyje atsitiktinai paimta brokuotina lemputė buvo pagaminta: 1) pirmojoje gamykloje; 2) antrojoje gamykloje; 3) trečiojoje gamykloje.

Pagal Bejeso formulę

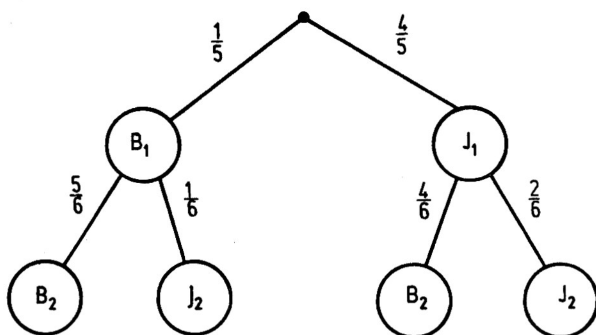
$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}01}{0{,}0081}=0{,}309,$$
$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}008}{0{,}0081}=0{,}346,$$
$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}007}{0{,}0081}=0{,}346.$$

Taigi tikimybė, kad brokuotina lemputė pagaminta pirmojoje gamykloje, lygi 0,309, antrojoje — 0,346 ir trečiojoje — 0,346. Matome, kad šios tikimybės tikslesnės už tikimybes $P(H_1)$, $P(H_2)$ ir $P(H_3)$.

Pastaba. Neturint (6) formulės taikymo įgūdžių, patartina nusibraižyti tiriamojo eksperimento schemą, vadinamą medžiu. Remiantis tuo medžiu, galima nesunkiai apskaičiuoti dominančių įvykių tikimybės.

7 pavyzdys. Išspręsime 4 pavyzdį, remdamiesi nusibraižytu eksperimento medžiu.

Nagrinėkime įvykius: B_1 —„Iš pirmosios dėžės išimtas baltas rutulys“, J_1 —„Iš pirmosios dėžės išimtas juodas rutulys“, B_2 — „Iš antrosios dėžės išimtas baltas rutulys“ ir J_2 —„Iš antrosios



182 pav.

dėžės išimtas juodas rutulys". Aišku, kad $P(B_1)=\frac{1}{5}$, $P(J_1)=\frac{4}{5}$. Perdėjus į antrąją dėžę baltą rutulį, joje bus 5 balti ir 1 juodas rutuliai. Tikimybė iš antrosios dėžės išimti baltą rutulį lygi $\frac{5}{6}$, o išimti juodą rutulį — $\frac{1}{6}$. Perdėjus į antrąją dėžę juodą rutulį, joje bus 4 balti ir 2 juodi rutuliai. Šiuo atveju tikimybė iš dėžės išimti baltą rutulį lygi $\frac{4}{6}$, o išimti juodą rutulį — $\frac{2}{6}$. Eksperimento įvykius pavaizduosime rutuliukais ir juos sujungsime atkarpomis, nurodydami tų įvykių tikimybes. Gautoji schema vadinama *eksperimento medžiu* (182 pav.).

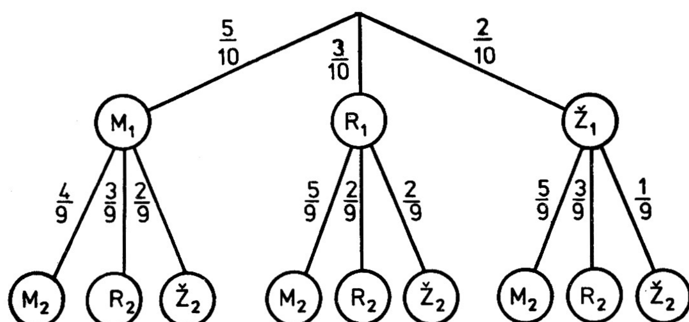
Įvykiui B_2 yra palankūs du nesutaikomi įvykiai $B_1 \cap B_2$ ir $J_1 \cap B_2$, pavaizduoti dviem medžio šakomis. Taigi

$$P(B_2)=P(B_1 \cap B_2)+P(J_1 \cap B_2)=$$
$$=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)+P(J_1)\cdot P(B_2|J_1)=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{21}{30}=0{,}7.$$

Pažymėsime, kad tikimybės medžio šakose yra dauginamos, o šakų tikimybės sudedamos.

8 pavyzdys. Dėžėje yra 5 mėlyni, 3 raudoni ir 2 žali rutuliai. Iš dėžės paeiliui imami du rutuliai. Apskaičiuosime tikimybę išimti: a) du raudonus rutulius; b) antruoju ėmimu — raudoną rutulį; c) tos pačios spalvos rutulius.

Nagrinėsime įvykius: M_i —„i-uoju ėmimu išimtas mėlynas rutulys", R_i —„i-uoju ėmimu išimtas raudonas rutulys" ir $Ž_i$ —„i-uoju ėmimu išimtas žalias rutulys", $i=1$, 2.



183 pav.

Šio eksperimento medis pavaizduotas 183 paveiksle.

a) Iš medžio matyti, kad $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$;

b) Kadangi įvykis R_2 yra nesutaikomų įvykių $M_1 \cap R_2$, $R_1 \cap R_2$ ir $\check{Z}_1 \cap R_2$ suma, tai

$$P(R_2) = P(M_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(\check{Z}_1 \cap R_2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10};$$

c) Įvykis „Išimti tos pačios spalvos rutuliai“ yra nesutaikomų įvykių $M_1 \cap M_2$, $R_1 \cap R_2$ ir $\check{Z}_1 \cap \check{Z}_2$ suma. Vadinasi, jo tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai, t. y.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45}.$$

Kai eksperimente elementariųjų įvykių yra daug, braižomas ne visas eksperimento medis, o tik tos jo šakos, kurios vaizduoja tiriamąjį įvykį.

11.9. Nepriklausomų bandymų serijos. Bernulio formulė

Ankstesniuose skyreliuose nagrinėjome eksperimentą (bandymą) ir skaičiavome kokio nors įvykio tikimybę. Praktikoje dažnai tenka eksperimentą kartoti.

Sakysime, kad *bandymai nepriklauso nuo įvykio A*, jeigu šio įvykio tikimybė nepriklauso nuo kituose bandymuose gautų rezultatų.

1 pavyzdys. Metant monetą 10 kartų, tikimybė, kad metus penktąjį kartą atsivers herbas, nepriklauso nuo kitų metimų rezultato.

Vadinasi, monetos metimas yra nepriklausomų pakartojamų bandymų pavyzdys.

Sakykime, kad tikimybė, jog įvykis A įvyks eksperimento metu, lygi p. Tada tikimybė, kad šis įvykis neįvyks, lygi $q=1-p$. Bandymą kartokime n kartų. Apskaičiuosime tikimybę $P_n(k)$, kad įvykis A įvyko k kartų. Pirmiausia apskaičiuosime tikimybę $P_3(2)$, t. y. tikimybę, kad trijų bandymų serijoje įvykis A įvyko du kartus. Įvykį A, įvykusį pirmajame bandyme, žymėsime A_1, antrajame — A_2 ir trečiajame — A_3. Tuomet įvykį C — „Trijų bandymų metu įvykis A įvyko du kartus" galime užrašyti suma šitokių nesutaikomų sudėtinių įvykių:

$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ (įvykis A įvyko pirmajame ir antrajame bandyme ir neįvyko trečiajame bandyme),

$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ (A įvyko pirmajame ir trečiajame bandyme ir neįvyko antrajame),

$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$ (A įvyko antrajame ir trečiajame bandyme ir neįvyko pirmajame bandyme).

Kiekvieno iš šių įvykių tikimybė lygi $p^2(1-p)$. Todėl

$$P(C)=P_3(2)=3p^2(1-p)=3p^2q.$$

Vieno sudėtinio įvykio tikimybė, kad atlikus n bandymų įvykis A įvyko k kartų ir neįvyko $n-k$ kartų, lygi $p^k q^{n-k}$. Tokių įvykių yra tiek, kiek galima sudaryti derinių iš n elementų po k, t. y. C_n^k. Kadangi visi sudėtiniai įvykiai yra nesutaikomi, tai jų sumos tikimybė lygi jų tikimybių sumai, t. y.

$$\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.} \qquad (1)$$

(1) formulė vadinama *Bernulio formule.*

Pavyzdžiai. 2. Šeimoje yra 5 vaikai. Apskaičiuosime tikimybę, kad tarp jų yra 3 berniukai, laikydami, kad tikimybė, jog gims berniukas, lygi 0,5 (iš tikrųjų ji lygi 0,515).

Pagal Bernulio formulę

$$P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

3. Šeimoje yra 6 vaikai. Apskaičiuosime tikimybę, kad šeimoje yra ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 5 berniukai.

Kaip ir 2 pavyzdyje, laikysime, kad $p=0{,}5$ $(q=1-0{,}5=0{,}5)$. Šiuo atveju palankūs įvykiai yra: 1) šeimoje 3 berniukai $(k=3)$; 2) šeimoje 4 berniukai $(k=4)$; 3) šeimoje 5 berniukai $(k=5)$. Jie yra nesutaikomi, todėl

$$P_6(3\leqslant k\leqslant 5)=P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)=$$

$$=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=$$

$$=(20+15+6)\cdot\frac{1}{64}=0{,}6406.$$

4. Darbininkas aptarnauja 4 vienodas stakles. Tikimybė, kad staklės per savaitę išsiderins, lygi $\frac{1}{6}$. Apskaičiuosime tikimybę, kad per savaitę darbininkui reiks derinti ne mažiau kaip 2 stakles.

Įvykis A —„Reikia derinti ne mažiau kaip 2 stakles" yra nesutaikomų įvykių B —„Reikia derinti 2 stakles", C —„Reikia derinti 3 stakles" ir D —„Reikia derinti 4 stakles" suma. Todėl

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=P_4(k\geqslant 2)=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=$$

$$=C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1+C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0=0{,}1314.$$

Spręsdami 3 ir 4 pavyzdžius, naudojomės formulėmis

$$\boxed{P_n(k_1\leqslant k\leqslant k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k),} \qquad (2)$$

$$\boxed{P_n(k\geqslant k_1)=\sum_{k=k_1}^{n}P_n(k).} \qquad (3)$$

Ištirsime, kaip tikimybė $P_n(k)$ priklauso nuo k. Nagrinėsime santykį

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{kq}. \qquad (4)$$

Su tomis k reikšmėmis, su kuriomis gautasis dalmuo didesnis už 1, tikimybė $P_n(k)$ didesnė už tikimybę $P_n(k-1)$. Taigi, jeigu

$$\frac{(n-k+1)p}{kq}>1,$$

t. y. jei $k<np+p$, tai didėjant k didėja ir $P_n(k)$. Jeigu $k>np+p$, tai didėjant k $P_n(k)$ mažėja. Vadinasi, $P_n(k)$ įgis didžiausią reikšmę su didžiausia k_0 reikšme, tenkinančia nelygybę $k_0\leqslant np+p$. Galimi du atvejai. Kai $np+p$ nėra sveikasis skaičius, akivaizdu,

kad $k_0=[np+p]$. Kai $np+p$ — sveikasis skaičius, $k_0=np+p$. Šiuo atveju iš (4) lygybės gauname

$$\frac{P_n(k_0)}{P_n(k_0-1)}=1, \text{ arba } P_n(k_0)=P_n(k_0-1).$$

Vadinasi, $P_n(k)$ įgyja didžiausią reikšmę su dviem k reikšmėmis: $k=k_0$ ir $k=k_0-1$.

Pavyzdžiai. 5. Moneta metama 100 kartų. Rasime patikimiausią herbo atsivertimo skaičių.

Kadangi $n=100$, $p=0{,}5$, $q=0{,}5$, tai $np+p=100\cdot0{,}5+0{,}5=50{,}5$ ir $k_0=[50{,}5]=50$.

6. Gamyklos produkcijos brokas sudaro 7,5%. Atsitiktinai paimtos 39 detalės. Rasime patikimiausią standartinių detalių skaičių.

Šiame pavyzdyje $n=39$, $q=0{,}075$, $p=1-0{,}075=0{,}925$ ir $np+p=39\cdot0{,}925+0{,}925=37$. Vadinasi, 37 ir 36 yra patikimiausi standartinių detalių skaičiai.

1 pastaba. Spręsdami uždavinius pagal (1)—(3) formules, kai n ir k dideli, susiduriame su skaičiavimo sunkumais. Tų sunkumų padeda išvengti *apytikslės Laplaso formulės:*

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{5}$$

$$P_n(a\leqslant k\leqslant b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right); \tag{6}$$

čia

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du;$$

$\varphi(x)$ — lyginė funkcija, t. y. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, o $\Phi(x)$ — nelyginė funkcija, t. y. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. Šių funkcijų reikšmės randamos iš lentelių (žr. priedo 1 ir 2 lenteles).

(5) ir (6) formulių neįrodinėsime, pateiksime tik jų taikymo pavyzdžių.

Pavyzdžiai. 7. Tikimybė, kad gims berniukas, lygi 0,515. Apskaičiuosime tikimybę, kad tarp 1000 naujagimių bus 520 berniukų.

Kadangi $n=1000$, $p=0{,}515$, $q=0{,}485$, $k=520$, tai

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{520-1000\cdot0{,}515}{\sqrt{1000\cdot0{,}515\cdot0{,}485}}=\frac{5}{15{,}8042}=0{,}3164.$$

Iš priedo 1 lentelės randame

$$\varphi(0{,}3164)=0{,}3790$$

ir pagal (5) formulę

$$P_{1000}(520)=\frac{0{,}3790}{15{,}8042}=0{,}024.$$

8. Tikimybė, kad pagamintoji detalė yra pirmosios rūšies, lygi 0,9. Apskaičiuosime tikimybę, kad iš 600 tikrinimui paimtų detalių pirmosios rūšies detalių bus ne mažiau kaip 520 ir ne daugiau kaip 535.

Remsimės (6) formule. Kadangi $b=535$, $a=520$, $n=600$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, tai

$$\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{535-600\cdot 0{,}9}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=-0{,}68,\quad \frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{520-600\cdot 0{,}9}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=-2{,}72$$

ir

$$P_{600}(520\leqslant k\leqslant 535)=\Phi(-0{,}68)-\Phi(-2{,}72)=$$
$$=-\Phi((0{,}68)+\Phi(2{,}72)=$$
$$=-0{,}2517+0{,}4967=0{,}2450.$$

2 pastaba. Kai tikimybė p yra labai maža, vietoj (5) formulės vartojama Puasono formulė:

$$\boxed{P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};} \qquad (7)$$

čia $\lambda=n\cdot p$.

Šiuo atveju (7) formulė daug tikslesnė už (5) formulę. $P_n(k)$ reikšmės randamos iš priedo 3 lentelės.

9 pavyzdys. Tikimybė, kad pagaminta detalė yra nestandartinė, lygi 0,005. Rasime tikimybę, kad tarp atsitiktinai paimtų 1000 detalių bus 4 nestandartinės detalės.

Kadangi $n=1000$, $p=0{,}005$, $k=4$, tai $\lambda=n\cdot p=1000\cdot 0{,}005=5$. Iš 3 lentelės randame

$$P_{1000}(4)\approx 0{,}1755.$$

11.10. Diskretusis atsitiktinis dydis ir jo skirstinys

Dažnai atliekami bandymai, kurių rezultatai yra skaičiai. Pavyzdžiui, metus lošimo kauliuką gali atsiversti sienelė su 1, 2, 3, 4, 5 ar 6 akutėmis. Iš anksto negalima nustatyti, koks akučių skaičius atsivers. Atsivertusių akučių skaičius yra atsitiktinis dydis. Nestandartinių detalių skaičius gamyklos vienos dienos pro-

dukcijoje, autoįvykių skaičius mieste per parą ir pan.— tai atsitiktinių dydžių pavyzdžiai.

Atsitiktiniu dydžiu, susietu su eksperimentu, vadinamas dydis, įgyjantis vienokias ar kitokias skaitines reikšmes. Norint nusakyti atsitiktinį dydį, reikia žinoti ne tik jo reikšmes, bet ir kaip dažnai tos reikšmės įgyjamos, t. y. reikia žinoti tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Atsitiktinius dydžius, kurie įgyja baigtinį skaičių reikšmių, vadinsime *diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais.* Atsitiktinius dydžius žymėsime raidėmis X, Y, Z ir t. t. Atsitiktinio dydžio X reikšmes žymėsime raidėmis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, o tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos — atitinkamai p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Jeigu žinomos visos atsitiktinio dydžio reikšmės ir tikimybės, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos, tai sakoma, kad žinomas *atsitiktinio dydžio skirstinys.* Skirstinį patogu užrašyti lentele

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

(1)

Įvykiai A_1 —„Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_1“, A_2 —„Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_2“, ..., A_n —„Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_n“ sudaro pilnąją tarpusavyje nesutaikomų įvykių erdvę, todėl tų įvykių suma yra būtinasis įvykis ir

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1. \quad (2)$$

Taigi (1) *lentelės antrosios eilutės skaičių suma lygi* 1.

Pavyzdžiai. 1. Du šauliai po vieną kartą šovė į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,6, antrojo — 0,8. Sudarysime atsitiktinio dydžio X — pataikymų į taikinį skaičiaus skirstinį.

Šiame pavyzdyje atsitiktinis dydis X gali įgyti tik 3 reikšmes: $x_1=0$ (įvykis A_1 —„Abu šauliai nepataikė į taikinį“), $x_2=1$ (įvykis A_2 —„Į taikinį pataikė tik vienas šaulys“) ir $x_3=2$ (įvykis A_3 — „Į taikinį pataikė abu šauliai“). Įvykiai A_1, A_2 ir A_3 sudaro pilnąją nesutaikomų įvykių erdvę. Kadangi $P(A_1)=(1-0{,}6)\cdot(1-0{,}8)=0{,}08$, $P(A_2)=0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}44$ ir $P(A_3)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48$, tai atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

X	0	1	2
P	0,08	0,44	0,48

2. Metami du lošimo kauliukai. Sudarysime atsitiktinio dydžio X — galimų atsiversti akučių skaičiaus skirstinį.

Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 2, 3, 4, ..., 11, 12. Remiantis 11.3 skyrelio 7 pavyzdyje sudaryta lentele, nesunku užrašyti šio dydžio skirstinį:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3. Tikimybė, jog įvyks įvykis A, lygi p. Įvykių A skaičius, atlikus n bandymų, yra atsitiktinis dydis X, galintis įgyti 0, 1, 2, ..., n reikšmių atitinkamai su tikimybėmis $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$, ..., $P_n(n)$. Sudarysime šio atsitiktinio dydžio skirstinį.

Remdamiesi 11.9 skyrelio (1) formule, sudarome lentelę:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^{n-0} q^0$	$C_n^1 p^{n-1} q^1$	$C_n^2 p^{n-2} q^2$	...	$C_n^k p^{n-k} q^k$	...	$C_n^n p^0 q^n$

Ši lentelė vadinama *Bernulio (binominiu) skirstiniu.*

11.11. Matematinė viltis ir dispersija

Skirstinys pilnutinai apibūdina atsitiktinį dydį. Tačiau dažnai reikia tokių atsitiktinio dydžio charakteristikų, kurios išreikštų esminius skirstinio bruožus. Viena iš tokių charakteristikų yra *matematinė viltis*, arba *vidurkis*.

Atsitiktinio dydžio X, apibrėžto 11.10 skyrelio (1) lentele, *matematine viltimi* vadinsime skaičių

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (1)$$

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuosime matematinę viltį atsitiktinio dydžio X, kurio skirstinys yra

X	2	3	0	5
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Pagal (1) formulę

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}4 = 3{,}1.$$

2. Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X — įvykio A pasirodymų skaičiaus eksperimente matematinę viltį, jeigu įvykio A tikimybė lygi p.

Atsitiktinis dydis X gali įgyti tik 2 reikšmes: $x_1=0$ (įvykis A eksperimente neįvyko su tikimybe $q=1-p$) ir $x_2=1$ (įvykis A eksperimente įvyko). Šio dydžio matematinė viltis yra:

$$M(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p.$$

Taigi *įvykio pasirodymų skaičiaus matematinė viltis eksperimente lygi šio įvykio tikimybei.*

Du atsitiktinius dydžius vadinsime *nepriklausomais,* jeigu vieno iš jų pasiskirstymo dėsnis nepriklauso nuo to, kokias galimas reikšmes įgijo kitas atsitiktinis dydis.

Nagrinėsime du atsitiktinius dydžius X ir Y, apibrėžtus lentelėmis:

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

Y	y_1	y_2
P	g_1	g_2

Apibrėšime šitokius atsitiktinius dydžius:

1) CX (atsitiktinio dydžio X ir konstantos C sandaugą) — lentele

CX	Cx_1	Cx_2	Cx_3
P	p_1	p_2	p_3

2) $X+Y$ (atsitiktinių dydžių X ir Y sumą) — lentele

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2	x_3+y_1	x_3+y_2
P	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2	p_3g_1	p_3g_2

3) XY (nepriklausomų atsitiktinių dydžių X ir Y sandaugą) — lentele

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2	x_3y_1	x_3y_2
P	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2	p_3g_1	p_3g_2

4) X^2 (atsitiktinio dydžio X kvadratą) — lentele

X^2	x_1^2	x_2^2	x_3^2
P	p_1	p_2	p_3

Panašiai galime apibrėžti CX, $X+Y$, XY ir X^2 ir atsitiktinių dydžių, įgyjančių didesnį reikšmių skaičių.

Galima įrodyti, kad matematinei vilčiai būdingos šios savybės:

1) $M(CX)=CM(X)$; (2)

2) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$; (3)

3) $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$. (4)

3 **pavyzdys.** Atsitiktiniai dydžiai X ir Y apibrėžti lentelėmis:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Y	2	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Apskaičiuosime $M(4X)$, $M(X+Y)$, $M(XY)$.

Kadangi $M(X)=0\cdot 01,+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}4=2$, $M(Y)=2\cdot 0{,}2+$ $+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5=0{,}9$, tai pagal (2)—(4) formules $M(4X)=4M(X)=$ $=4\cdot 2=8$, $M(X+Y)=M(X)+M(Y)=2+0{,}9=2{,}9$, $M(XY)=$ $=M(X)\cdot M(Y)=2\cdot 0{,}9=1{,}8$.

Uždavinys. Radę atsitiktinių dydžių $4X$, $X+Y$, XY skirstinius, apskaičiuokite jų matematines viltis. Gautuosius rezultatus palyginkite su 3 pavyzdžio rezultatais.

Pavyzdžiai. 4. Rasime 11.10 skyrelio 3 pavyzdyje nagrinėto atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

Šiuo atveju skaičiuoti matematinę viltį pagal apibrėžimą netikslinga, nes reikia atlikti sudėtingus skaičiavimus. Skaičiuosime paprasčiau. Sakykime, kad X_i yra įvykio A pasirodymų skaičius atlikus i-ąjį bandymą. Aišku, kad x_i gali įgyti tik 2 reikšmes: 1 su tikimybe p ir 0 su tikimybe $q=1-p$. Tuomet

$$M(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p.$$

Tačiau

$$X=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n$$

ir

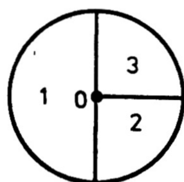
$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)=np. \quad (5)$$

5. Šaulio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,4. Šaulys į taikinį šauna 3 kartus. Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X — pataikymų į taikinį skaičiaus matematinę viltį.

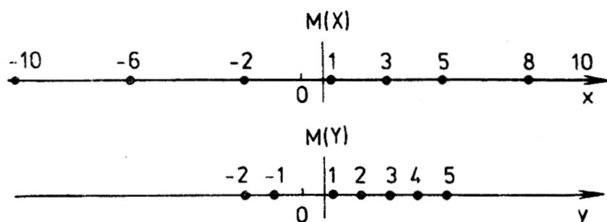
Pagal (5) formulę

$$M(X)=3\cdot 0{,}4=1{,}2.$$

Šį uždavinį galėjome išspręsti pagal matematinės vilties apibrėžimą radę atsitiktinio dydžio X skirstinį.



184 pav.



185 pav.

6. Taikinys (184 pav.) pritvirtintas prie ašies O. Įsukus taikinį, kad šaulys nematytų sektorius žyminčių skaitmenų, leidžiama šauti. Pataikęs į 1 sektorių, šaulys išlošia 4 Lt, į 2 sektorių — 5 Lt ir į 3 sektorių — 6 Lt. Ar verta dalyvauti lošime, jeigu už vieną šūvį reikia mokėti 5 litus?

Rasime atsitiktinio dydžio X — išloštų litų skaičiaus matematinę viltį. Kadangi 4 Lt galima išlošti su tikimybe $\frac{1}{2}$, 5 Lt — su tikimybe $\frac{1}{4}$ ir 6 Lt — su tikimybe $\frac{1}{4}$, tai

$$M(X)=4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{4}<5.$$

Lošime dalyvauti neapsimoka, nes dažniausiai galima išlošti mažiau kaip 5 Lt, o už šūvį reikia mokėti 5 Lt.

7. Rasime atsitiktinių dydžių X ir Y matematines viltis, jeigu jų skirstiniai yra:

X	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Y	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Remdamiesi (1) formule, gauname:

$$M(X)=(-10)\cdot\frac{1}{16}+(-6)\cdot\frac{1}{8}+(-2)\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{4}+$$
$$+5\cdot\frac{1}{16}+8\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{8},$$
$$M(Y)=(-2)\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot0+2\cdot\frac{1}{16}+$$
$$+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad 7 pavyzdyje, nors atsitiktinių dydžių skirstiniai ir skirtingi, tačiau jų matematinės viltys vienodos. Tad kuo gi skiriasi šių dydžių skirstiniai?

185 paveiksle parodyta, kaip išsidėsčiusios atsitiktinių dydžių X ir Y galimos reikšmės apie jų matematines viltis. Matome, kad atsitiktinio dydžio Y reikšmės išsidėsčiusios arčiau $M(Y)$. Įvesime naują atsitiktinio dydžio charakteristiką, apibūdinančią jo „išsibarstymą“ apie matematinę viltį.

Atsitiktinio dydžio X *nuokrypiu* vadinsime to dydžio ir jo matematinės vilties $M(X)$ skirtumą $X-M(X)$.

Atsitiktinio dydžio X nuokrypio kvadrato matematinę viltį vadinsime šio dydžio *dispersija* ir žymėsime $D(X)$:

$$\boxed{D(X)=M((X-M(X))^2),} \tag{6}$$

o dydį

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}} \tag{7}$$

— *kvadratiniu nuokrypiu, arba atsilenkimu.*

Taigi dispersija rodo atsitiktinio dydžio išsibarstymo apie jo matematinę viltį pobūdį.

Dažnai patogiau dispersiją skaičiuoti pagal formulę

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \tag{8}$$

Šios formulės neįrodinėsime. Neįrodinėsime ir pagrindinių dispersijos savybių:

1) $D(C)=0,$ (9)

2) $D(CX)=C^2D(X),$ (10)

3) $D(X+C)=D(X),$ (11)

4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y);$ (12)

čia C — konstanta.

Pažymėsime, kad 3 savybė taikoma skaičiuojant atsitiktinio dydžio, įgyjančio dideles skaitines reikšmes, dispersiją. C parenkame taip, kad $X+C$ įgytų daug mažesnes reikšmes.

Pavyzdžiai. 8. Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio, apibrėžto lentele

X	-1	0	1	3
P	0,1	0,2	0,4	0,3

dispersiją.

Kadangi $M(X)=(-1)\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}3=1{,}2$, $M(X^2)=$ $=(-1)^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}2+1^2\cdot 0{,}4+3^2\cdot 0{,}3=3{,}2$, tai remdamiesi (8) formule gauname

$$D(X)=3{,}2-1{,}2^2=1{,}76.$$

9. Apskaičiuosime 7 pavyzdyje nagrinėtų atsitiktinių dydžių X ir Y dispersijas.

Kadangi

$$M(X^2)=(-10)^2\cdot\frac{1}{16}+(-6)^2\cdot\frac{1}{8}+(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{16}+$$
$$+3^2\cdot\frac{1}{4}+5^2\cdot\frac{1}{16}+8^2\cdot\frac{1}{8}+10^2\cdot\frac{1}{16}=29{,}875,$$

$$M(Y^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot 0+2^2\cdot\frac{1}{16}+$$
$$+3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=7{,}75,$$

tai

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=29{,}875-\left(\frac{7}{8}\right)^2=29{,}109,$$

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=7{,}75-\left(\frac{7}{8}\right)^2=6{,}984.$$

Atsitiktinio dydžio Y dispersija yra mažesnė už atsitiktinio dydžio X dispersiją. Dydis Y mažiau „išsibarstęs“ apie $M(Y)$.

10. Žinoma, kad $D(X)=3$, $D(Y)=5$. Apskaičiuosime: a) $D(3X+2Y)$; b) $D(5X+12)$.

Remsimės (9) – (12) formulėmis:

a) $D(3X+2Y)=3^2D(X)+2^2D(Y)=9\cdot 3+4\cdot 5=47$;

b) $D(5X+12)=D(5X)=5^2D(X)=25\cdot 3=75$.

11. Rasime atsitiktinio dydžio X, nagrinėto 11.10 skyrelio 3 pavyzdyje, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį.

4 pavyzdyje apskaičiavome $M(X_i)=p$, $M(X)=np$. Kadangi

$$M(X_i^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p,$$

tai

$$D(X_i)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

ir

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=pq+pq+\cdots+pq=npq, \quad (13)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}. \quad (14)$$

12. Rasime 10 000 detalių partijos brokuotinų detalių skaičiaus matematinę viltį, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį, jeigu tikimybė, kad detalė yra brokuotina, lygi 0,02.

Remsimės (5), (13) ir (14) formulėmis.

Šiuo atveju $n=10\,000$, $p=0{,}02$, $q=1-0{,}02=0{,}98$ ir $M(X)=$ $=10\,000\cdot 0{,}02=200$, $D(X)=10\,000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98=196$, $\sigma(X)=\sqrt{196}=$ $=14$.

11.12. Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija

8—11 skyreliuose diskretusis atsitiktinis dydis buvo charakterizuotas jo skirstiniu. Šiame skyrelyje susipažinsime su daug bendresne atsitiktinio dydžio charakteristika — pasiskirstymo funkcija.

Nagrinėsime įvykį, kurio metu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes, mažesnes už kokį nors realųjį skaičių x, t. y. $X<x$. Šio įvykio pasirodymo tikimybė yra x funkcija. Pažymėję ją $F(x)$, turime

$$F(x)=P(X<x). \tag{1}$$

Funkcija $F(x)$ vadinama atsitiktinio dydžio X *pasiskirstymo funkcija,* arba integraline pasiskirstymo funkcija.

1 pavyzdys. Rasime atsitiktinio dydžio X, apibrėžto lentele

X	0	3	7
P	0,2	0,5	0,3

pasiskirstymo funkciją ir nubraižysime jos grafiką.

Jeigu $x\leqslant 0$, tai įvykis $X<0$ yra negalimas ir jo tikimybė lygi 0. Su visomis x reikšmėmis, esančiomis intervale $(0, 3]$, funkcija $F(x)$ lygi 0,2. Iš tikrųjų, jei, pavyzdžiui, $x=2{,}5$, tai tikimybė $P(X<2{,}5)=0{,}2$, nes X įgyja vienintelę reikšmę, mažesnę už 2,5, lygią 0 su tikimybe 0,2. Jeigu $x\in(3, 7]$, tai $F(x)=0{,}2+0{,}5=0{,}7$. Kai $x\in(7, +\infty)$, $F(x)=0{,}2+0{,}5+0{,}3=1$.

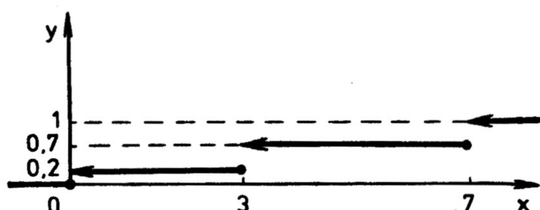
Vadinasi,

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ kai } x\in(-\infty, 0], \\ 0{,}2, \text{ kai } x\in(0, 3], \\ 0{,}7, \text{ kai } x\in(3, 7], \\ 1, \text{ kai } x\in(7, +\infty). \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 186 paveiksle.

Matome, kad diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija yra laiptinė. Atsitiktinio dydžio reikšmės yra pasiskirstymo funkcijos trūkio taškų abscisės, o tikimybės, su kuriomis šios reikšmės įgyjamos, lygios funkcijos šuoliams trūkio taškuose.

Atsitiktinis dydis X vadinamas *tolydžiuoju,* jeigu jo pasiskirstymo funkcija $F(x)=P(X<x)$ yra tolydi.



186 pav.

Pasiskirstymo funkcija $F(x)$ pasižymi šiomis savybėmis:

1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, nes $F(x)$ yra įvykio $X<x$ tikimybė, o bet kuri tikimybė yra ne mažesnė už 0 ir ne didesnė už 1;

2) $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija, t. y. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, jei $x_2 > x_1$. Iš tikrųjų iš įvykio $X<x_1$ išplaukia įvykis $X<x_2$, jei tik $x_2 > x_1$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, nes įvykis $X < -\infty$ yra negalimas, o įvykis $X < +\infty$ yra būtinas;

4) teisinga formulė

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Kadangi įvykis $X<b$ yra nesutaikomų įvykių $X<a$ ir $a \leqslant X < b$ suma, tai

$$P(X<b) = P(X<a) + P(a \leqslant X < b).$$

Iš čia

$$P(a \leqslant X < b) = P(X<b) - P(X<a) = F(b) - F(a);$$

5) jeigu atsitiktinis dydis X yra tolydus, tai

$$P(X=c) = 0. \tag{3}$$

Iš (2) formulės, kai $a=c$, $b=c+\Delta x$, gauname

$$P(c \leqslant X < c+\Delta x) = F(c+\Delta x) - F(c).$$

Kadangi $F(x)$ yra tolydi funkcija, tai

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(c+\Delta x) = F(c)$$

ir

$$P(X=c) = \lim_{\Delta x \to 0} P(c < X < c+\Delta x) = F(c) - F(c) = 0.$$

Iš 4 ir 5 savybių išplaukia lygybės

$$P(a \leqslant X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) =$$
$$= P(a < X < b) = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Pavyzdžiai. 2. Apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinis dydis X, apibrėžtas 1 pavyzdyje, įgis reikšmes iš intervalo $[1, 7)$.

Pagal (2) formulę

$$P(1 \leqslant X < 7) = F(7) - F(1) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5.$$

3. Atsitiktinio dydžio X integralinė pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}x, & \text{kai } 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{kai } x > 3. \end{cases}$$

Apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes iš intervalo: a) $(0,\ 0{,}75)$; b) $(1,\ 3)$.

Pagal (4) formules:

a) $P(0 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - 0 = \frac{1}{4}$;

b) $P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Tarkime, kad tolydžiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija $F(x)$ turi išvestinę $f(x)$, t. y.

$$F'(x) = f(x). \tag{5}$$

Funkcija $f(x)$ vadinama *atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio,* arba *diferencialine pasiskirstymo funkcija.*

Kadangi pasiskirstymo tankio funkcija yra nemažėjančios funkcijos $F(x)$ išvestinė, tai ji yra neneigiama: $f(x) \geqslant 0$.

Funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, todėl pagal Niutono—Leibnico formulę

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

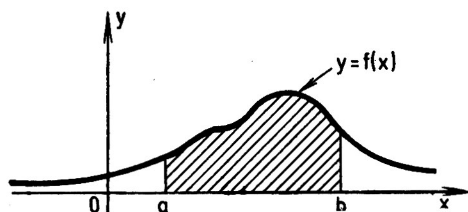
Iš čia pagal (4) formules

$$\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.} \tag{6}$$

Geometriškai tikimybė $P(a \leqslant X \leqslant b)$ reiškia plotą kreivinės trapecijos, apribotos pasiskirstymo tankio funkcijos grafiku, ašimi Ox ir tiesėmis $x = a$, $x = b$ (187 pav.).

(6) lygybėse paėmę $a = -\infty$, $b = +\infty$, gausime būtinąjį įvykį $X \in (-\infty,\ +\infty)$, kurio tikimybė lygi 1, t. y.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.} \tag{7}$$



187 pav.

Iš (6) formulės, kai $a=-\infty$, $b=x$, gauname pasiskirstymo funkciją:

$$F(x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{8}$$

Pavyzdžiai. 4. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{kai } x<0, \\ a\sin x, & \text{kai } 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ 0, & \text{kai } x>\pi. \end{cases}$$

1) Apskaičiuosime konstantos a reikšmę; 2) rasime atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkciją; 3) apskaičiuosime tikimybę $\mathrm{P}\left(-\frac{\pi}{3}\leqslant X<\frac{2\pi}{3}\right)$.

1) Remsimės (7) formule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{\pi} a\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\infty} 0\cdot dx=$$

$$=\int_{0}^{\pi} a\sin x\,dx=a(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}=\mathrm{a}(-(-1)-(-1))=2a=1.$$

Iš čia $a=0{,}5$.

2) Naudodamiesi (8) formule, tirsime 3 atvejus:

a) Jeigu $x<0$, tai $f(x)=0$ ir

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$$

b) Jeigu $0\leqslant x\leqslant\pi$, tai $f(t)=0$ intervale $(-\infty,\ 0)$ ir $f(t)=$ $=\frac{1}{2}\sin t$ intervale $[0,\ x)$. Todėl

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin t\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\sin t\,dt=\frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_{0}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos x)=\sin^2\frac{x}{2};$$

c) Jeigu $x>\pi$, tai

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{x} 0\cdot dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1.$$

Vadinasi,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{kai } x<0,\\ \sin^2\frac{x}{2}, & \text{kai } 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & \text{kai } x>\pi.\end{cases}$$

3) Pagal (2) formulę

$$P\left(-\frac{\pi}{3}\leqslant X<\frac{2\pi}{3}\right)=F\left(\frac{2\pi}{3}\right)-F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{2\pi}{3}-0=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

5. Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X tikimybę $P(2\leqslant X\leqslant 3)$, jei

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{kai } x<1,\\ \frac{1}{x^2}, & \text{kai } x\geqslant 1\end{cases}$$

Naudosimės (6) formulėmis:

$$P(2\leqslant X\leqslant 3)=\int_{2}^{3}\frac{1}{x^2}dx=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{2}^{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

6. Ištirsime, ar funkcijos

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & \frac{\pi}{2}<x<\infty,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{6},\\ 3\cos 3x, & -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6},\\ 0, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

gali būti atsitiktinio dydžio X atitinkamai pasiskirstymo ir pasiskirstymo tankio funkcijos.

Funkcija $F(x)$ negali būti atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija, nes $\cos x$ intervale $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ yra mažėjanti funkcija.

Patikrinsime, ar funkcija $f(x)$ tenkina (7) lygybę:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{6}} 0\cdot dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 3\cos 3x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\infty} 0\cdot dx = \sin 3x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \neq 1.$$

Matome, kad funkcija $f(x)$ negali būti atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkcija.

11.13. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos

Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X, kurio pasiskirstymo tankio funkcija yra $f(x)$, *matematinę viltį* apibrėšime šitaip:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \tag{1}$$

o dispersiją —

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx. \tag{2}$$

Kai tankio funkcija už intervalo $[a, b]$ ribų lygi 0, (1) ir (2) formulės tampa paprastesnės:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)\,dx. \tag{4}$$

Visos matematinės vilties ir dispersijos savybės, įrodytos diskretiesiems atsitiktiniams dydžiams, teisingos ir tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams.

Kvadratinis nuokrypis apibrėžiamas panašiai kaip ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{5}$$

Pavyzdys. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{5}, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Apskaičiuosime šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.

Pagal (3) formulę

$$M(X)=\int_0^5 0{,}2x\,dx=0{,}2\frac{x^2}{2}\Big|_0^5=0{,}2\cdot\frac{25}{2}=2{,}5,$$

o pagal (4) formulę

$$D(X)=\int_0^5 0{,}2(x-2{,}5)^2dx=0{,}2\frac{(x-2{,}5)^3}{3}\Big|_0^5=\frac{0{,}2\cdot 2{,}5^3}{3}\cdot 2=2{,}083.$$

11.14. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio skirstinių pavyzdžiai

11.14.1. Tolygusis skirstinys. Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra *tolygiai pasiskirstęs intervale* $[a, b]$, jeigu tame intervale pasiskirstymo tankio funkcija yra pastovi, o už jo ribų lygi 0, t. y.

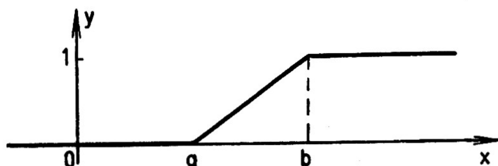
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ c, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Konstantos c reikšmę rasime remdamiesi (7) formule:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_a^b c\,dx=cx\Big|_a^b=(b-a)c=1,\ \text{t. y. } c=\frac{1}{b-a}.$$

Taigi tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$



188 pav.

Remdamiesi (8) formule, rasime funkciją $F(x)$:

1) kai $x \in (-\infty, a)$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$;

2) kai $x \in [a, b]$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$;

3) kai $x > b$, $F(x) = \int\limits_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int\limits_{b}^{x} 0 \cdot dt = \frac{b-a}{b-a} = 1$.

Taigi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 188 paveiksle.

Remdamiesi (3), (4) ir (5) formulėmis, rasime tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio X matematinę viltį, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį:

$$M(X) = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} t dt = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b t dt = \frac{1}{b-a} \frac{t^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$D(X) = \int\limits_a^b \left(t - \frac{b+a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \left((t^2 - (a+b)t + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right) dt =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Matome, kad tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio dispersija priklauso nuo intervalo ilgio. Kuo ilgesnis intervalas, tuo labiau atsitiktinis dydis išsibarstęs apie matematinę viltį (šiuo atveju apie intervalo $[a, b]$ vidurio tašką $\frac{a+b}{2}$).

Sakykime, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Tada

$$p = P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

t. y.

$$p = \frac{l}{L}; \qquad (1)$$

čia l — intervalo $[\alpha, \beta]$ ilgis, L — intervalo $[a, b]$ ilgis.

Į atsitiktinio dydžio X, t. y. intervalo $[a, b]$ taškus x galima žiūrėti kaip į bandymo elementariųjų įvykių erdvę. Sakykime, A yra įvykis, reiškiantis, kad atsitiktinai parinktas intervalo $[a, b]$ taškas priklauso intervalui $[\alpha, \beta]$. Tada intervalo $[\alpha, \beta]$ taškai yra įvykiui A palankūs elementarieji įvykiai. Taigi, naudojantis (1) formule, galima apibrėžti įvykio A „geometrinę tikimybę": įvykio A tikimybė lygi intervalų $[\alpha, \beta]$ ir $[a, b]$ ilgių santykiui:

$$P(A) = \frac{l}{L} \leqslant 1.$$

Geometrines tikimybes panašiai galima apibrėžti ir tuomet, kai bandymo elementarieji įvykiai yra plokštumos arba erdvės taškai.

Pavyzdžiai. 1. Į stotį per 2 minutes atvyksta tik vienas traukinys. Apskaičiuosime tikimybę, kad išvykus vienam traukiniui antrasis traukinys pasirodo po 1,5 minutės.

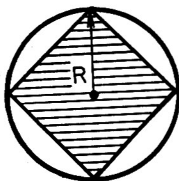
Šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė yra laiko intervalas $[0, 2]$, kurio ilgis lygus 2, o palankūs įvykiai sudaro intervalą $[0, 1{,}5]$, kurio ilgis 1,5. Todėl ieškomoji tikimybė lygi

$$p = \frac{l}{L} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75.$$

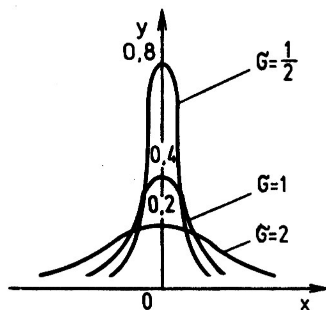
2. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžtas kvadratas (189 pav.). Apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinai parinktas skritulio taškas priklauso kvadratui.

Sakykime, A yra įvykis „Atsitiktinai parinktas skritulio taškas priklauso kvadratui". Tada

$$P(A) = \frac{S_{\text{kv.}}}{S_{\text{skr.}}} = \frac{(\sqrt{2}R)^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0{,}64.$$



189 pav.



190 pav.

11.14.2. Normalusis skirstinys. Tarp visų atsitiktinių dydžių svarbią vietą užima normalusis skirstinys, kuris apibrėžiamas tankio funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \qquad (2)$$

čia a ir σ — realieji skaičiai.

190 paveiksle pavaizduotas (2) funkcijos grafikas, kai $a=0$ ir $\sigma=\frac{1}{2}$, 1, 2.

Platesniame tikimybių teorijos kurse įrodoma, kad atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį,

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2 \text{ ir } \sigma(X)=\sigma. \qquad (3)$$

Taigi (2) funkcijos parametrai a ir σ yra nagrinėjamojo atsitiktinio dydžio matematinė viltis ir kvadratinis nuokrypis. Kita vertus, jeigu žinoma atsitiktinio dydžio matematinė viltis $M(X)=a$ ir dispersija $D(X)=\sigma^2$ ir žinoma, kad tas dydis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, tai žinoma ir to dydžio pasiskirstymo tankio funkcija, o kartu ir integralinė pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (4)$$

Tikimybė, kad atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, reikšmė pateks į intervalą $[\alpha, \beta]$, pagal 11.12 skyrelio (6) formulę lygi

$$P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Įrodoma, kad

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right); \tag{5}$$

čia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

yra Laplaso funkcija, kurios reikšmės randamos iš priedo 2 lentelės.

Atskiru atveju

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{6}$$

Taigi tikimybė, kad atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, nuo savo matematinės vilties nukrypsta mažiau kaip ε, lygi $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Pavyzdžiui,

$$P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}954,$$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Kadangi 0,9973 artimas 1, tai laikome, kad nelygybė

$$|X - a| < 3\sigma$$

praktiškai yra teisinga, t. y. galioja vadinamoji *„trijų sigmų taisyklė"*: su tikimybe, lygia 1, galima tvirtinti, kad teisinga nelygybė $|X - a| < 3\sigma$, t. y.

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 1.$$

Pavyzdžiai. 1. Radijo aparato garantija — 1,5 metų. Aparato veikimo laikas yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio $\sigma = 0{,}3$ metų. Apskaičiuosime tikimybę, kad radijo aparato nereiks remontuoti nuo 1 iki 2 metų.

Pagal sąlygą $a = 1{,}5$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\sigma = 0{,}3$. Pasinaudoję (5) formule, gauname

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \Phi\left(\frac{2 - 1{,}5}{0{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 1{,}5}{0{,}3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) =$$

$$= 2\Phi(1{,}67) = 2 \cdot 0{,}4525 = 0{,}9050.$$

2. Gamykla gamina velenėlius. Velenėlio diametras yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio $a = 1{,}8$ cm, $\sigma = 0{,}02$ cm. a) Rasime brokuotino velenėlio tikimybę, jeigu leis-

tina velenėlio diametro paklaida lygi $\pm 0,05$ cm. b) Sužinosime, kokį velenėlio diametro tikslumą galima garantuoti su tikimybe 0,95.

a) Brokuotino velenėlio tikimybė lygi $P(|X-1,8|>0,05)$. Priešingo įvykio (velenėlis yra standartinis) tikimybė pagal (6) formulę lygi

$$P(|X-1,8|<0,05)=2\Phi\left(\frac{0,05}{0,02}\right)=2\Phi(2,5)=2\cdot 0,4938=0,9876.$$

Vadinasi, tikimybė, kad velenėlis bus brokuotinas, lygi

$$1-0,9876=0,0124.$$

b) Iš (6) formulės

$$P(|X-1,8|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,02}\right)$$

pagal sąlygą gauname

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,02}\right)=\frac{0,95}{2}=0,475.$$

Iš priedo 2 lentelės randame

$$\frac{\varepsilon}{0,02}=1,96,$$

arba

$$\varepsilon=1,96\cdot 0,02=0,0392\approx 0,04.$$

Taigi su tikimybe 0,95 galime tvirtinti, kad

$$|X-1,8|<0,04,$$

t. y. velenėlio diametras yra intervale tarp 1,76 cm ir 1,84 cm.

11.15. Didžiųjų skaičių dėsnis

Atlikdami bandymą, negalime pasakyti, kokią reikšmę jame įgis atsitiktinis dydis. Tačiau kartojant bandymą daug kartų, išryškėja tam tikri atsitiktinio dydžio dėsningumai. Tikimybių teorijos kurse įrodoma keletas labai svarbių teoremų apie atsitiktinio dydžio reikšmių pasiskirstymo dėsningumus. Trumpai susipažinsime su viena iš jų — *Bernulio didžiųjų skaičių dėsniu.* Jį įrodysime remdamiesi *Čebyševo nelygybe.*

1 teorema (Čebyševo nelygybė). *Tikimybė, kad atsitiktinio dydžio X nuokrypio modulis mažesnis už teigiamąjį skaičių* ε, *yra ne mažesnė* už $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, *t. y.*

$$\boxed{P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.} \qquad (1)$$

Šios teoremos neįrodinėsime. Atkreipsime dėmesį, kad atskiru atveju, kai $\varepsilon=3\sigma$, iš (1) nelygybės išplaukia nelygybė

$$P(|X-M(X)|<3\sigma)\geqslant\frac{8}{9}. \quad (2)$$

Sakykime, įvykio A pasirodymo tikimybė lygi p, S_n — įvykio A pasirodymų skaičius, atlikus n bandymų. Nagrinėsime atsitiktinį dydį $\frac{S_n}{n}$, kurį vadinsime įvykio A *pasirodymų, atlikus n bandymų, dažniu,* arba *statistine tikimybe.*

Remdamiesi matematinės vilties ir dispersijos savybėmis bei 11.11 skyrelio (5) ir (13) formulėmis, gauname

$$M(X)=M\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n}M(S_n)=\frac{1}{n}\cdot np=p,$$

$$D(X)=D\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(S_n)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}.$$

Šias $M(X)$ ir $D(X)$ reikšmes įrašome į (1) nelygybę:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \quad (3)$$

Kai $n\to\infty$, tai $\frac{pq}{n\varepsilon^2}\to 0$ ir $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1$.

Įrodėme šitokią teoremą.

2 teorema (Bernulio didžiųjų skaičių dėsnis). *Jeigu įvykio A pasirodymo atliekant bandymą tikimybė lygi p, S_n — įvykio A pasirodymų skaičius atlikus n nepriklausomų bandymų, tai su bet kuriuo $\varepsilon>0$*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.} \quad (4)$$

Kitaip sakant, kai bandymų skaičius pakankamai didelis, įvykio A pasirodymo dažnis mažai skiriasi nuo to įvykio pasirodymo tikimybės.

Tais atvejais, kai įvykio pasirodymo tikimybė nežinoma, remdamiesi didžiųjų skaičių dėsniu, ją galime pakeisti šio įvykio dažniu, apskaičiuotu atlikus didelį skaičių bandymų.

11.16. Pratimai

1. Kurie įvykiai yra būtini, negalimi, atsitiktiniai: A — „Į taikinį šauta 2 kartus ir 3 kartus pataikyta“, B — „Metus 3 lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma ne didesnė už 18“, C — „Metus 3 lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma lygi 17“, D — „Metus vieną lošimo kauliuką, atsivertė 7 akutės“,

E — „Atsitiktinai parinktas triženklis skaičius ne didesnis už 1000“, F — „Metus 3 monetas, atsivertė 3 herbai“.

2. Metama moneta. Ar sutaikomi įvykiai: A — „Atsivertė herbas“, ir B — „Atsivertė skaičius“?

3. Metamos dvi monetos. Kurie įvykiai yra sutaikomi: A — „Bent viena moneta atsivertė skaičiumi“, B — „Bent viena moneta atsivertė herbu“, C — „Abi monetos atsivertė herbais“, D — „Abi monetos atsivertė skaičiais“.

4. Metamas lošimo kauliukas. Ar sutaikomi įvykiai: A — „Atsivertė 2 akutės“ ir B — „Atsivertė lyginis akučių skaičius“?

5. Ar šie įvykiai sudaro pilnąją įvykių erdvę: a) Į taikinį šauta 2 kartus. Įvykiai: A_1 — „Nepataikyta“, A_2 — „Pataikyta vieną kartą“, A_3 — „Pataikyta du kartus“; b) Metamos 2 monetos. Įvykiai: A — „Atsivertė du herbai“, B — „Atsivertė du skaičiai“; c) Metamos dvi monetos. Įvykiai: A — „Atsivertė du herbai“, B — „Atsivertė du skaičiai“, C — „Tik viena moneta atsivertė skaičiumi“?

6. Metamas lošimo kauliukas. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių: A — „Atsivertė 4 akutės“, B — „Atsivertė lyginis skaičius akučių“, C — „Atsivertė ne mažiau kaip 2 akutės“.

7. Dėžėje yra 18 baltų ir 6 juodi rutuliukai. Apskaičiuokite įvykio A — „Iš dėžutės atsitiktinai išimtas rutuliukas yra baltas“ tikimybę.

8. Moneta metama 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad herbas atsivertė 2 kartus.

9. Dėžėje yra 16 rutuliukų: 5 balti, 7 juodi ir 4 raudoni. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš dėžės atsitiktinai išimtas rutuliukas yra raudonas.

10. Pirmojoje dėžėje yra 5 rutuliai, sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, antrojoje dėžėje — 5 rutuliai, sunumeruoti skaičiais 6, 7, 8, 9, 10. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai imama po vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad išimtų rutulių numerių suma: a) ne mažesnė už 7; b) lygi 11; c) ne didesnė už 11?

11. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tikimybę, kad: 1) atsivertusių akučių suma lygi 6, o skirtumas 4; 2) atsivertusių akučių suma mažesnė už 5; 3) atsivertusių akučių suma didesnė už 9; 4) vienas kauliukas atsivertė sienele su 5 akutėmis, o kitas — sienele su mažesniu už 5 akučių skaičiumi; 5) vieno kauliuko atsivertusių akučių skaičius 2 kartus didesnis už kito kauliuko atsivertusių akučių skaičių.

12. Rinkdamas šešių ženklų telefono numerį, Jonas užmiršo paskutinį skaitmenį ir jį surinko atsitiktinai. Raskite tikimybę, kad buvo surinktas reikiamas skaitmuo.

13. Moneta metama 2 kartus. Kokia tikimybė, kad bent kartą atsivers herbas?

14. Loterijoje yra vienas 500 Lt laimėjimas, keturi laimėjimai po 100 Lt, 10 laimėjimų po 50 Lt, dvidešimt laimėjimų po 20 Lt, 175 laimėjimai po 10 Lt ir 500 laimėjimų po 3 Lt. Kokia tikimybė, nusipirkus vieną iš 5000 loterijos bilietų, išlošti ne mažiau kaip 20 Lt?

15. Kubas, kurio visos sienos nudažytos, supjaustytas į 64 vienodo dydžio kubiukus. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas vienas kubiukas turės dvi dažytas sieneles.

16. Kiek skirtingų keturženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

17. Iš 15 sportininkų reikia atrinkti keturių etapų estafetės (800, 400, 200, 100 m) 4 dalyvius. Keliais būdais tai galima padaryti?

18. Komisija susideda iš pirmininko, sekretoriaus ir 5 jos narių. Keliais būdais komisija gali pasiskirstyti pareigomis?

19. Iš 15 sportininkų reikia atrinkti 1000 m bėgimo 4 dalyvius. Keliais būdais tai galima padaryti?

20. Chirurginiame skyriuje dirba 40 gydytojų. Keliais būdais galima sudaryti brigadą iš: 1) chirurgo ir jo asistento; 2) chirurgo ir 4 jo asistentų?

21. Keliais būdais galima sudėti 6 skirtingas knygas lentynoje, kad: 1) 2 pasirinktos knygos būtų greta; 2) 2 pasirinktos knygos nebūtų greta?

22. Išspręskite lygtis ir nelygybes:

1) $12C_x^1+C_{x+4}^2=162$, 2) $3C_{x+1}^2+P_2\cdot x=4A_x^2$,

3) $A_x^4\cdot P_{x-4}=42P_{x-2}$, 4) $A_{x-1}^2-C_x^1=79$,

5) $C_{x+1}^{x-1}<21$.

23. Keliais būdais iš 10 mergaičių ir 5 berniukų galima sudaryti komandą, kurioje būtų 3 berniukai ir 2 mergaitės?

24. Kortų kaladėje yra 36 kortos, tarp kurių 4 tūzai. Keliais būdais galima paimti 6 kortas, kad tarp jų būtų 2 tūzai?

25. Dėžėje yra 10 baltų ir 5 juodi rutuliai. Keliais būdais iš dėžės galima išimti 3 rutulius, kad: 1) jie būtų balti; 2) būtų juodi; 3) du būtų balti, o vienas juodas? 4) vienas būtų baltas, o du juodi?

26. Teniso turnyre dalyvauja 10 vyrų ir 6 moterys. Keliais būdais galima sudaryti 2 mišrias poras?

27. Statybos valdyboje yra 15 dažytojų, 10 tinkuotojų ir 5 staliai. Keliais būdais galima sudaryti brigadą iš 2 dažytojų, 3 tinkuotojų ir 1 staliaus?

28. Dėžėje yra 6 balti ir 4 juodi rutuliai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištraukti 2 rutuliai yra balti?

29. Kortelėse surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 15 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad tose kortelėse parašytų skaičių suma lygi 10?

30. Dėžėje yra 6 vienodi kubiukai, paeiliui sunumeruoti nuo 1 iki 6. Kubiukai atsitiktinai imami iš dėžės ir dedami į vieną eilę. Kokia tikimybė, kad jie bus išdėstyti didėjančia numerių tvarka?

31. Dėžėje yra 15 detalių, tarp kurių 10 dažytų. Atsitiktinai išimamos 3 detalės. Kokia tikimybė, kad jos visos dažytos?

32. Dėžėje yra 10 skaitmenimis nuo 1 iki 10 sužymėtų detalių. Atsitiktinai paimtos 6 detalės. Raskite tikimybę, kad tarp paimtų detalių yra: 1) detalė Nr. 1; 2) detalė Nr. 1 ir detalė Nr. 2?

33. Lentynoje sudėtos 6 algebros ir 4 geometrijos knygos. Kokia tikimybė, kad tarp atsitiktinai paimtų 7 knygų yra 3 geometrijos knygos.

34. Loterijoje yra 5 daiktiniai laimėjimai, skirti 30 bilietų. Pirmasis lošėjas ištraukia 4 bilietus. Kokia tikimybė, kad du ištraukti bilietai laimės?

35. Loterijoje iš 45 skirtingų skaičių reikia atspėti 6 skaičius. Kokia tikimybė atspėti: 1) visus 6 skaičius; 2) 5 skaičius; 3) 4 skaičius; 4) 3 skaičius.

36. Iš 52 kortų kaladės atsitiktinai paimtos 6 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų yra: 1) vienas tūzas; 2) tūzas ir karalius?

37. Iš 6 nupirktų bilietų 4 į pirmąją eilę. Kokia tikimybė, kad iš atsitiktinai ištrauktų 3 bilietų du yra į pirmąją eilę?

38. Iš 60 egzamino klausimų studentas moka 50. Biliete yra 3 klausimai. Kokia tikimybė, kad studentas ištrauks bilietą su 2 žinomais klausimais?

39. Ant stalo padėta 10 knygų. 5 knygos kainuoja po 6 Lt, 3 — po 2 Lt ir dvi — po 4 Lt. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos dvi knygos kainuoja 8 Lt?

40. Kokia tikimybė, kad metus lošimo kauliuką atsivers ne daugiau kaip 3 akutės?

41. Kokia tikimybė, kad metus du lošimo kauliukus ant abiejų sienelių atsivers 4 arba 11 akučių?

42. Dėžėje yra 8 balti ir 12 raudonų rutulių. Atsitiktinai iš dėžės imami 6 rutuliai. Kokia tikimybė, kad tarp jų: 1) ne daugiau kaip vienas baltas rutulys; 2) ne mažiau kaip 2 balti rutuliai?

43. Dėžėje yra 4 balti ir 8 juodi rutuliai. Kokia tikimybė, kad tarp atsitiktinai išimtų 3 rutulių bent vienas yra baltas?

44. Dėžėje yra 9 balti, 9 juodi, 9 mėlyni ir 9 raudoni rutuliai. Atsitiktinai išimti 3 rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie yra arba balti, arba raudoni?

45. Ant stalo yra 6 algebros ir 4 geometrijos knygos. Kokia tikimybė, kad iš 3 atsitiktinai paimtų knygų bent viena yra geometrijos knyga?

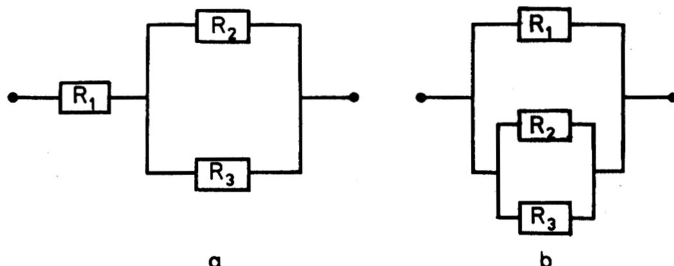
46. Dėžėje yra 15 baltų, 10 juodų ir 5 raudoni rutuliai. Iš dėžės išimamas vienas rutulys, po to vėl grąžinamas atgal ir išimamas kitas rutulys. Grąžinus antrąjį rutulį į dėžę, išimamas trečias rutulys. Kokia tikimybė, kad iš dėžės buvo išimti skirtingų spalvų rutuliai?

47. Trys šauliai po vieną kartą šauna į taikinį. Kokia tikimybė, kad bus: 1) pataikyta 2 kartus; 2) pataikyta 3 kartus; 3) pataikyta bent vieną kartą, jeigu pirmojo šaulio pataikymo tikimybė 0,5, antrojo — 0,6 ir trečiojo — 0,7?

48. Darbininkas aptarnauja 3 stakles. Tikimybė, kad per pamainą suges pirmosios staklės, lygi 0,15, antrosios — 0,1 ir trečiosios — 0,12. Raskite tikimybę, kad per pamainą suges bent vienos staklės.

49. Iš 10 skaitmenimis 0, 1, 2, ..., 9 sunumeruotų kortelių atsitiktinai imamos po vieną 3 kortelės ir dedamos į vieną eilę. Raskite tikimybę, kad bus gautas skaičius 625.

50. Tikimybė, kad per laiką T sudegs rezistorius R_1, lygi 0,1, rezistorius R_2 — 0,2 ir rezistorius R_3 — 0,3. Apskaičiuokite tikimybę, kad 191 paveiksle, *a*, *b*, pavaizduotose grandinėse per laiką T nutrūks elektros srovė.



191 pav.

51. Studentas iš 30 egzamino klausimų moka 25. Raskite tikimybę, kad studentas atsakys į visus 3 dėstytojo pateiktus klausimus.

52. Du šauliai šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,7, antrojo — 0,8. Raskite tikimybę, kad bus: 1) bent vieną kartą pataikyta; 2) vieną kartą pataikyta; 3) du kartus pataikyta; 4) nė vieno karto nepataikyta.

53. Iš dėžės, kurioje yra 3 balti ir 2 juodi rutuliai, atsitiktinai paimti du rutuliai ir perdėti į antrąją dėžę, kurioje buvo 4 balti ir 4 juodi rutuliai. Po to iš antrosios dėžės atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis yra baltas?

54. Pirmojoje dėžėje yra 4 balti ir 6 juodi rutuliai, antrojoje — tik balti rutuliai, trečiojoje — tik juodi rutuliai. Atsitiktinai pasirinkta viena dėžė ir iš jos atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis yra juodas?

55. Pirmojoje dėžėje yra 4 balti ir 6 raudoni rutuliai, antrojoje — 7 balti ir 3 raudoni rutuliai, trečiojoje — tik raudoni rutuliai. Iš atitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai išimtas rutulys yra raudonas. Kokia tikimybė, kad rutulys išimtas iš pirmosios dėžės?

56. 10 jaunuolių išėjo grybauti. 5 iš jų baravyką randa su tikimybe 0,6, trys — su tikimybe 0,5 ir kiti du — su tikimybe 0,3. Vienas vaikinas rado baravyką. Kokia tikimybė, kad baravyką rado pirmosios grupės jaunuolis?

57. Klasėje yra 20 mergaičių ir 10 berniukų. Matematikos namų darbo nepadarė 4 mergaitės ir 3 berniukai. Atsitiktinai prie lentos pakviestas mokinys nepadarė namų darbo. Kokia tikimybė, kad prie lentos pakviestas berniukas?

58. Tiltas sugriūva, kai į jį pataiko viena bomba. Raskite tikimybę, kad tiltas susprogdintas, jeigu buvo numestos 4 bombos, kurių pataikymų tikimybės atitinkamai lygios 0,3, 0,4, 0,6 ir 0,7.

59. Į dėžę, kurioje yra du nežinomos spalvos rutuliai, įdėtas baltas rutulys. Iš trijų rutulių atsitiktinai paimtas vienas rutulys. Raskite tikimybę, kad jis yra baltas?

60. Dėžėje yra 12 raudonų, 8 žali ir 10 mėlynų rutulių. Atsitiktinai išimamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad išimtas rutulys yra raudonas, jeigu žinoma, kad jis ne mėlynas?

61. Pro degalinę važiuoja lengvosios ir krovininės mašinos. Krovininės mašinos sudaro 60% visų pravažiuojančių mašinų. Tikimybė, kad prisipilti degalų užvažiuos lengvoji mašina, lygi 0,2, krovininė — 0,1. Prie degalinės privažiavo mašina. Kokia tikimybė, kad tai krovininė mašina?

62. Trijose dėžėse yra po 20 detalių. Pirmojoje dėžėje visos detalės yra standartinės, antrojoje yra 15, o trečiojoje — 10 standartinių detalių. Iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai išimta standartinė detalė. Po to ši detalė grąžinta į tą pačią dėžę ir iš jos atsitiktinai išimta vėl standartinė detalė. Kokia tikimybė, kad detalės buvo imtos iš trečiosios dėžės?

63. Pirmoji gamykla gamina 10%, antroji — 5% ir trečioji — 15% nestandartinių elektros lempučių. Į parduotuvę atvežta 50% lempučių iš pirmosios gamyklos, 30% lempučių iš antrosios gamyklos ir 20% lempučių iš trečiosios gamyklos. Nupirkta lemputė yra standartinė. Kokia tikimybė, kad ji pagaminta: 1) pirmojoje gamykloje; 2) antrojoje gamykloje; 3) trečiojoje gamykloje?

64. Tikimybė išlošti loterijoje lygi 0,08. Kokia tikimybė, kad iš 5 pirktų bilietų du bus laimingi?

25. Užsak. Nr. 284.

65. Tikimybė, kad šaulys pataikys į taikinį, lygi 0,8. Šaulys į taikinį šovė 5 kartus. Kokia tikimybė, kad pataikyta: 1) bent vieną kartą; 2) ne mažiau kaip du kartus; 3) tris kartus?

66. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe 0,85. Šaulys į taikinį šauna 25 kartus. Koks tikėtiniausias pataikymų į taikinį skaičius?

67. Tikimybė, kad baravykas sukirmijęs, lygi 0,2. Rasta 50 baravykų. Koks tikėtiniausias sveikų baravykų skaičius?

68. Du vienodo pajėgumo šachmatininkai žaidžia šachmatais. Kas labiau tikėtina: iš 4 partijų išlošti dvi, ar iš 6 partijų išlošti 3?

69. Lošimo kauliukas metamas 240 kartų. Kokį tikėtiniausią skaičių kartų atsivers 6 akutės?

70. Agurkų daigumas 90%. Kokia tikimybė, kad iš pasėtų 5 grūdų išdygs 3?

71. Kokia tikimybė, kad 10 kartų metus lošimo kauliuką trys akutės atsivers: 1) ne daugiau kaip 2 kartus; 2) daugiau kaip 2 ir mažiau kaip 5 kartus?

72. Tikimybė, kad birželio mėnesį diena yra giedra, lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad iš 7 savaitės dienų 5 bus giedros?

73. Lošimo kauliukas metamas 500 kartų. Kokia tikimybė, kad šešios akutės atsivers: 1) 83 kartus; 2) 78 kartus; 3) ne mažiau kaip 70 ir ne daugiau kaip 83 kartus; 4) ne mažiau kaip 76 ir ne daugiau kaip 90 kartų?

74. Tikimybė, kad pagaminta detalė yra nestandartinė, lygi 0,001. Raskite tikimybę, kad tarp 1000 detalių bus: 1) viena nestandartinė detalė; 2) visos standartinės detalės; 3) 5 nestandartinės detalės.

75. Moksleivių pažangumas 75%. Kokia tikimybė, kad iš 300 moksleivių pažangių bus ne mažiau kaip 219 ir ne daugiau kaip 234?

76. Moneta metama 400 kartų. Kokia tikimybė, kad herbas atsivers: a) 200 kartų; b) 170 kartų; c) ne mažiau kaip 204 ir ne daugiau kaip 214 kartų; d) ne mažiau kaip 196 ir ne daugiau kaip 206 kartus?

77. Tikimybė, kad knygos puslapyje yra klaidų, lygi 0,0025. Tikrinama 800 puslapių knyga. Raskite tikimybę, kad: a) knygoje yra 5 puslapiai su klaidomis; b) knygoje yra nuo 3 iki 5 puslapių su klaidomis.

78. Automatas gamina 90% standartinių detalių. Raskite tikimybę, kad tarp 900 detalių standartinių detalių bus ne mažiau kaip 790 ir ne daugiau kaip 820.

79. Ar kokio nors atsitiktinio dydžio pasiskirstymo dėsnis gali būti apibrėžtas lentele

a)

X	−4	0,5	3	8	5
P	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

b)

X	0	2	5	10
P	0,1	0,3	0,2	0,3

80. Metamas lošimo kauliukas. Sudarykite atsitiktinio dydžio X — „Atsivertusių akučių skaičius“ pasiskirstymo dėsnį.

81. Moneta metama du kartus. Sudarykite herbo pasirodymų skaičiaus pasiskirstymo dėsnį.

82. Metamos 3 monetos. Sudarykite skaičiaus pasirodymų pasiskirstymo dėsnį.

83. Dėžėje yra 4 balti ir 2 juodi rutuliai. Atitiktinai paimti du rutuliai. Parašykite baltų rutulių tarp paimtųjų skaičiaus pasiskirstymo dėsnį.

84. Dėžėje yra 4 balti ir 2 juodi rutuliai. Atsitiktinai paimti 3 rutuliai. Parašykite baltų rutulių tarp paimtųjų skaičiaus pasiskirstymo dėsnį.

85. Parašykite pataikymų į taikinį skaičiaus pasiskirstymo dėsnį, jeigu buvo šauta 3 kartus ir kiekvieno šūvio pataikymo tikimybė lygi 0,7.

86. Atliekami 4 nepriklausomi bandymai. Įvykio A pasirodymo tikimybė lygi 0,6. Parašykite įvykio A pasirodymų skaičiaus pasiskirstymo dėsnį.

87. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y apibrėžti lentelėmis:

a)

X	1	2
P	0,4	0,6

Y	3	4
P	0,8	0,2

b)

X	5	6
P	0,6	0,4

Y	0	1
P	0,2	0,8

Raskite atsitiktinių dydžių $X+Y$, XY, X^2, Y^2 pasiskirstymo dėsnius.

88. Raskite matematinę viltį atsitiktinio dydžio X, apibrėžto lentele

a)

X	2	4	7
P	0,3	0,2	0,5

b)

X	—0,3	0,5	0,8	1,2
P	0,2	0,1	0,4	0,3

89. $M(X)=4$, $M(Y)=5$. Raskite matematinę viltį šių atsitiktinių dydžių: a) $Z=X+0{,}1Y$; b) $Z=3X+5Y$.

90. Pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,8. Kiek kartų reikia šauti į taikinį, kad būtų galima tikėtis 12 pataikymų?

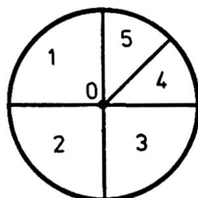
91. Lošimo kauliukas metamas 18 kartų. Kiek kartų gali neatsiversti 6 akutės?

92. Kiek kartų reikia mesti lošimo kauliuką, kad būtų galima tikėtis, jog 5 kartus atsivers trys akutės?

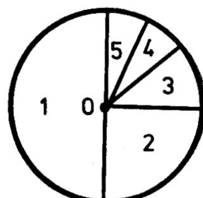
93. Į taikinį šaudoma tol, kol pataikoma 4 kartus. Kiek kartų reikia šauti, jeigu vieno šūvio pataikymo tikimybė lygi 0,4.

94. Taikinys (192 pav.) pritvirtintas prie ašies taške O. Įsukus taikinį, kad šaulys nematytų sektorius žyminčių skaitmenų, leidžiama šauti. Pataikęs į pirmąjį sektorių, šaulys išlošia 1 Lt, į antrąjį — 2 Lt, į trečiąjį — 3 Lt, į ketvirtąjį — 4 Lt ir į penktąjį — 5 Lt. Už šūvį reikia mokėti 3 Lt. Ar apsimoka dalyvauti lošime?

95. Tokiomis pat kaip 94 uždavinyje sąlygomis šaulys šauna į taikinį (193 pav.). Pataikęs į pirmąjį sektorių, šaulys išlošia 1 Lt, į antrąjį — pralošia 2 Lt,



192 pav.



193 pav.

į trečiąjį — išlošia 3 Lt, į ketvirtąjį — pralošia 4 Lt ir į penktąjį — išlošia 5 Lt. Ar apsimoka dalyvauti lošime?

96. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio, apibrėžto 88 uždavinyje, dispersiją.

97. Dėžėje yra 6 balti ir 4 raudoni rutuliai. Iš dėžės atsitiktinai paeiliui po vieną imami 5 rutuliai ir kiekvieną kartą ištrauktasis rutulys grąžinamas atgal. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X — „Išimtų baltų rutulių skaičius“ matematinę viltį ir dispersiją.

98. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y apibrėžti 87 uždavinyje. Apskaičiuokite $M(X)$, $M(Y)$, $M(X+Y)$ (dviem būdais), $M(XY)$ (dviem būdais), $M(X^2)$, $M(Y^2)$, $D(X)$, $D(Y)$, $D(X+Y)$ (dviem būdais).

99. Raskite 10 000 detalių partijos brokuotinų detalių skaičiaus matematinę viltį, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį, jeigu brokuotinos detalės tikimybė lygi 0,12.

100. Atsitiktinis dydis X apibrėžtas lentele

X	0	2	4
P	0,3	0,5	0,2

Raskite pasiskirstymo integralinę funkciją ir nubraižykite jos grafiką.

101. Raskite atsitiktinio dydžio X, apibrėžto lentele

X	1	2	3	4
P	0,2	0,35	0,15	0,3

pasiskirstymo integralinę funkciją.

102. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinis dydis X, apibrėžtas **100** uždavinyje, įgyja reikšmes iš intervalo: a) [1,5, 4]; b) [0,5, 4,5].

103. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo integralinė funkcija yra

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \frac{x}{4}, & 0<x\leqslant 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso intervalui (0, 3).

104. Apskaičiuokite **103** uždavinyje apibrėžto atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkciją, matematinę viltį ir dispersiją.

105. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ ax^2, & 0<x\leqslant 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

1) Raskite parametro a reikšmę; 2) raskite pasiskirstymo integralinę funkciją; apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes iš intervalo [0,5, 1,5].

106. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 6, \\ ax-3, & 6<x\leqslant 8, \\ 0, & x>8. \end{cases}$$

Raskite parametro a reikšmę ir pasiskirstymo integralinę funkciją.

107. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo integralinė funkcija yra

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant -3, \\ \frac{x}{6}+a, & -3<x\leqslant 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Raskite a, $M(X)$, $D(X)$.

108. Raskite $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ atsitiktinio dydžio X, tolygiai pasiskirsčiusio intervale $(3, 7)$.

109. Į kvadratą, kurio kraštinė a, įbrėžtas skritulys. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinktas kvadrato taškas priklausys skrituliui?

110. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, matematinė viltis ir dispersija atitinkamai lygios 12 ir 4. Raskite tikimybę, kad atsitiktinio dydžio X reikšmės yra intervale $[14, 16]$.

111. Matavimo atsitiktinės klaidos pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį, kurio $a=0$, $\sigma=20$ mm. Raskite tikimybę, kad bus atliktas matavimas, kurio paklaida absoliutiniu didumu ne didesnė už 4 mm.

112. Gaminamų detalių ilgis yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio $a=150$ mm, $\sigma=2$ mm. Raskite broko tikimybę, jei detalės leistinasis ilgis yra 150 ± 3 mm. Kokį tikslumą galima garantuoti su tikimybe 0,97?

113. Atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio $a=40$. Apskaičiuokite šio dydžio dispersiją, jeigu žinoma, kad tikimybė įgyti reikšmes iš intervalo $[40, 50]$ lygi 0,4772.

114. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, matematinė viltis lygi a, o kvadratinis nuokrypis σ. Raskite: 1) tikimybę, kad X įgyja reikšmes iš intervalo $[\alpha, \beta]$; 2) tikimybę, kad $|X-a|<\varepsilon$, kai:

1) $a=6$, $\sigma=2$, $\alpha=4$, $\beta=12$, $\varepsilon=4$;
2) $a=10$, $\sigma=8$, $\alpha=14$, $\beta=18$, $\varepsilon=2$;
3) $a=13$, $\sigma=4$, $\alpha=11$, $\beta=21$, $\varepsilon=8$;
4) $a=0$, $\sigma=2$, $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\varepsilon=1$;
5) $a=9$, $\sigma=4$, $\alpha=10$, $\beta=12$, $\varepsilon=1$.

11.17. Atsakymai

1. B, E — būtini, A, D — negalimi, C ir F — atsitiktiniai įvykiai. **2.** Ne. **3.** A ir B, A ir D, B ir C. **4.** Taip. **5.** a) taip; b) ne; c) taip. **6.** $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{5}{6}$. **7.** $P(A)=\frac{3}{4}$. **8.** 0,375. **9.** 0,25. **10.** 1) 1; 2) $\frac{1}{5}$,

3) $\frac{3}{5}$. **11.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{9}$; 5) $\frac{1}{6}$. **12.** 0,1. **13.** 0,75. **14.** 0,007. **15.** 0,375. **16.** 840. **17.** 32760. **18.** 42. **19.** 1365. **20.** 1) 1560; 2) $40C_{39}^{4}=40\times \times 82251$. **21.** 1) $P_2 \cdot P_5=240$; 2) $P_6-P_2 \cdot P_5=480$. **22.** 1) 8; 2) 3; 3) 7; 4) 11; 5) {1, 2, 3, 4, 5}. **23.** $C_{10}^{2} \cdot C_5^3=450$. **24.** $C_4^2 \cdot C_{32}^{4}=215760$. **25.** 1) 120; 2) 10; 3) $C_{10}^{2} \cdot C_5^1=225$; 4) $C_{10}^{1} \cdot C_5^2=100$. **26.** $A_{10}^{2} \cdot C_6^2=1350$. **27.** $C_{15}^{2}\times \times C_{10}^{3} \cdot C_5^1=63000$. **28.** $\frac{1}{3}$. **29.** 0,0381. **30.** $\frac{1}{720}$. **31.** $\frac{24}{91}$. **32.** 1) 0,6.

33. $\frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7}=0,5$. **34.** $\frac{C_5^2 \cdot C_{25}^2}{C_{30}^4}=0,1095$. **35.** 1) $\frac{1}{C_{45}^{6}}=0,00000012$;

2) $\frac{C^5 \cdot C_{39}^{1}}{C_{45}^{6}}=0,000029$; 3) $\frac{C_6^4 \cdot C_{39}^{2}}{C_{45}^{6}}=0,0014$; 4) $\frac{C_6^3 \cdot C_{39}^{3}}{C_{45}^{6}}=0,022$.

36. 1) 0,336; 2) 0,107. **37.** 0,6. **38.** 0,3580. **39.** $\frac{16}{45}$. **40.** 0,5. **41.** $\frac{5}{36}$.

42. 1) $\frac{C_{12}^{6}+C_8^1 \cdot C_{12}^{5}}{C_{20}^{6}}=0,187$; 2) 0,813. **43.** $1-\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{41}{55}$. **44.** $\frac{C_9^3+C_9^3}{C_{36}^3}= =0,0235$. **45.** $1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$. **46.** $\frac{1}{36}$. **47.** 1) 0,44; 2) 0,21; 3) 0,94.

48. 0,3268. **49.** 0,0014. **50.** a) 0,154; b) 0,006. **51.** $\frac{115}{203}$. **52.** 1) 0,94; 2) 0,38; 3) 0,56; 4) 0,06. **53.** $\frac{13}{25}$. **54.** $\frac{8}{15}$. **55.** 0,3158. **56.** 0.5882. **57.** $\frac{3}{7}$. **58.** 0,95. **59.** $\frac{2}{3}$. **60.** $\frac{3}{5}$. **61.** $\frac{3}{7}$. **62.** $\frac{4}{29}$. **63.** 1) 0,497; 2) 0,315; 3) 0,188. **64.** $P_5(2)= =0,05$. **65.** 1) $1-P_5(0)=0,9997$; 2) $1-P_5(0)-P_5(1)=0,9933$; 3) $P_5(3)= =0,2048$. **66.** 22. **67.** 40. **68.** $P_4(2)=\frac{3}{8}$, $P_6(3)=\frac{5}{16}$. Taigi labiau tikėtina iš keturių partijų išlošti dvi. **69.** 40. **70.** $P_5(3)=0,073$. **71.** 1) $P_{10}(k\leqslant 2)=0,775$; 2) $P_{10}(2<k<5)=0,209$. **72.** $P_7(5)=0,2753$. **73.** 1) 0,048; 2) 0,039; 3) 0,43; 4) 0,599. **74.** 1) 0,368; 2) 0,368; 3) 0,003. **75.** 0,673. **76.** a) 0,04; b) $4,4\cdot 10^{-4}$; c) 0,264; d) 0,38. **77.** a) $P_{800}(5)=0,0298$; b) $P_{800}(3\leqslant k\leqslant 5)=0,2219$; $P_{900}(790\leqslant k\leqslant 820)=0,853$. **79.** a) taip; b) ne. **80.**

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

81.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

82.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

83.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

84.

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

85.

X	0	1	2	3
P	0,027	0,189	0,441	0,343

86.

X	0	1	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

87. a)

$X+Y$	4	5	6
P	0,32	0,56	0,12

XY	3	4	6	8
P	0,32	0,08	0,48	0,12

X^2	1	4
P	0,4	0,6

Y^2	9	16
P	0,8	0,2

b)

$X+Y$	5	6	7
P	0,12	0,56	0,32

XY	0	5	6
P	0,2	0,48	0,32

X^2	25	36
P	0,6	0,4

Y^2	0	1
P	0,2	0,8

88. a) 4,9; b) 0,67. **89.** a) 4,5; b) 37. **90.** 15. **91.** 15. **92.** 30. **93.** 10. **94.** Ne. **95.** Taip. **96.** a) 4,89; b) 0,2821. **97.** $M(X)=3$, $D(X)=1{,}20$. **98.** a) $M(X)=1{,}6$. $M(Y)=3{,}2$. $M(X+Y)=4{,}8$, $M(XY)=5{,}12$, $M(X^2)=2{,}8$, $M(Y^2)=10{,}4$, $D(X)=0{,}24$, $D(Y)=0{,}16$, $D(X+Y)=0{,}4$; b) $M(X)=5{,}4$, $M(Y)=0{,}8$, $M(X+Y)=6{,}2$, $M(XY)=4{,}32$, $M(X^2)=29{,}4$, $M(Y^2)=0{,}8$, $D(X)=0{,}24$, $D(Y)=0{,}16$, $D(X+Y)=0{,}4$. **99.** $M(X)=1200$, $D(X)=1056$, $\sigma(X)=32{,}5$.

100. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}3, & 0<x\leqslant 2,\\ 0{,}8, & 2<x\leqslant 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ **101.** $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 1,\\ 0{,}2, & 1<x\leqslant 2,\\ 0{,}55, & 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}7, & 3<x\leqslant 4,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ **102.** a) $P(1{,}5\leqslant X\leqslant 4)=0{,}5$; b) $P(0{,}5\leqslant X\leqslant 4{,}5)=0{,}7$. **103.** $P(0<X<3)=\frac{3}{4}$. **104.** $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}25, & 0<x\leqslant 4,\\ 0, & x>4,\end{cases}$ $M(X)=2$, $D(X)=\frac{4}{3}$. **105.** 1) $a=\frac{3}{8}$, 2) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{8}x^3, & 0<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ 3) $P(0{,}5\leqslant X\leqslant 1{,}5)=0{,}4063$. **106.** $a=0{,}5$, $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 6,\\ \frac{x^2}{4}-3x+9, & 6<x\leqslant 8.\\ 1, & x>8.\end{cases}$ **107.** $a=0{,}5$, $M(X)=0$, $D(X)=3$. **108.** $M(X)=5$, $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **109.** 0,785. **110.** 0,1498. **111.** 0,16. **112.** $P=0{,}13$, 4,34 mm. **113.** $\sigma=5$. **114.** 1) 0,8400, 0,9545; 2) 0,1499, 0,1974; 3) 0,6687, 0,9545; 4) 0,5328, 0,3829; 5) 0,1747, 0,1974.

12. MATEMATINĖS STATISTIKOS ELEMENTAI

12.1. Statistikos objektas ir uždaviniai

Statistikos mokslo pradmenų aptikta Kinijoje — beveik prieš 4000 metų. Kiniečiai naudojo statistines lenteles. Iki XVIII amžiaus buvo tik registruojami stebėjimo duomenys ir statistika buvo aprašomojo pobūdžio. Pavyzdžiui, Kardanas 1570 m. susidomi statistika, tirdamas žmonių amžiaus trukmę. 1693 m. Halėjus sudaro statistines lenteles dėl gyvybės draudimo. Tikimybių teorija teoriškai pagrindė statistiką ir ji tapo mokslu, kurio dėsniais remiantis galima analizuoti stebėjimų duomenis ir daryti mokslines prognozes.

Matematinė statistika nagrinėja stebėjimo rezultatų matematinio aprašymo ir analizavimo būdus. Stebėjimo rezultatai — tai aibė skaičių, apibūdinančių tiriamojo objekto kiekybines charakteristikas. Pavyzdžiui, galima tyrinėti studentų pasiskirstymą pagal pažangumą, pagal svorį ar ūgį ir kt. Vietoj objektų pasiskirstymo pagal požymį galima kalbėti apie atsitiktinio dydžio X — požymio reikšmių pasiskirstymą. 11 skyriuje susipažinome su atsitiktinių dydžių tikimybėmis, jų matematinėmis viltimis, dispersijomis, skirstiniais, pasiskirstymų funkcijomis, pasiskirstymų tankio funkcijomis. Visi dydžiai buvo žinomi. Praktikoje būna kitaip — nežinomi tiriamojo atsitiktinio dydžio parametrai. Jų nustatymas — vienas iš pagrindinių statistikos uždavinių. Atliekamas eksperimentas (stebėjimas) ir iš gautų duomenų nustatomos nežinomų parametrų reikšmės. Tačiau eksperimento duomenys susieti su stebėjimo ir matavimo paklaidomis, todėl gautos parametrų charakteristikos yra apytikslės. Vadinasi, reikia mokėti įvertinti rastojo parametro apytiksles reikšmes ir ištirti to įvertinimo tikslumą.

Svarbus statistikos uždavinys yra ir statistinių hipotezių tikrinimas. Bet koks tvirtinimas apie atsitiktinio dydžio skirstinį arba apie to skirstinio parametrus vadinamas *statistine hipoteze.* Remdamiesi matematinės statistikos metodais, galime pasakyti, ar statistiniai duomenys neprieštarauja iškeltajai hipotezei, ar pastebėtoji priklausomybė tarp dviejų atsitiktinių dydžių reiškia objektyviai egzistuojančią jų priklausomybę ir kt.

Šiame skyriuje trumpai susipažinsime tik su atsitiktinio dydžio, kurio žinomas skirstinys, bet nežinomi jo parametrai, parametrų įverčiais bei dviejų atsitiktinių dydžių koreliacine tiesine priklausomybe.

12.2. Generalinė aibė ir imtis

Sakykime, objektų aibė tiriama pagal kokius nors požymius, kuriuos galima nusakyti skaičiais. Tą aibę vadinsime *generaline aibe*. Paprastai tiriamojo požymio skirstinys generalinėje aibėje yra nežinomas. Norint jį nustatyti, reikėtų ištirti visus generalinės aibės objektus. Tačiau tai padaryti dažnai būna sunku (kai generalinė aibė didelė) ar netikslinga (kai tyrimas susijęs su objektų naikinimu). Pavyzdžiui, norint nustatyti automatinėmis staklėmis gaminamų rutuliukų guoliams diametrų ilgių skirstinį vienos dienos produkcijoje, reikėtų išmatuoti kiekvieno rutuliuko diametro ilgį. Tai pareikalautų daug laiko ir darbo. O nustatant mėsos kombinato gaminamų konservų kokybę, reikėtų atidaryti kiekvieną konservų dėžutę ir sugadinti visą produkciją. Todėl daroma kitaip: atsitiktinai parenkama generalinės aibės dalis, randamas tiriamojo požymio skirstinys šioje dalyje ir iš jo sprendžiama apie to požymio skirstinį generalinėje aibėje. Atsitiktinai parinkta generalinės aibės dalis vadinama *imtimi,* jos elementų skaičius vadinamas *imties tūriu.* Taikant matematinės statistikos metodus, galima įvertinti tiriamojo požymio skirstinį generalinėje aibėje, t. y. nustatyti, ar pakankamai tiksliai imties požymio skirstinys apibūdina generalinės aibės požymio skirstinį. Aišku, kad šis tikslumas priklauso nuo imties tūrio n. Taigi praktikoje svarbu rasti minimalų skaičių n, garantuojantį norimą tikslumą.

Matematinės statistikos metodai tinka tik tada, kai imtis yra *reprezentatyvi,* t. y. jei kiekvienas generalinės aibės elementas turi vienodas galimybes patekti į imtį. Imtis gali būti sudaroma įvairiai. Vienas iš imties sudarymo būdų yra *atsitiktinis elementų parinkimas.* Į imtį elementus galima atsitiktinai parinkti po vieną, grąžinant į generalinę aibę arba negrąžinant. Tačiau ne visada atsitiktinis parinkimas tinka imčiai sudaryti. Pavyzdžiui, jeigu detalių partija yra pagaminta keliomis skirtingomis staklėmis, tai imtį geriau sudaryti taip, kad į ją patektų visomis staklėmis pa-

gamintos detalės. Šiuo atveju generalinę aibę reikia suskaidyti į dalis (kiekvienomis staklėmis pagamintos detalės), iš tų dalių atsitiktinai paimti po tam tikrą skaičių detalių ir iš jų sudaryti imtį. Praktikoje imtis dažnai sudaroma *mechaniniu būdu* (iš generalinės aibės į imtį imamas kas dešimtas, dvidešimtas, trisdešimtas ir t. t. objektas).

Matematinėje statistikoje tūrio n imties tiriamojo požymio skirstinį stengiamasi aprašyti atsitiktinių dydžių terminais. n kartų stebimas atsitiktinis dydis X, kurio skirstinys nežinomas, ir gaunama n reikšmių, kurios vadinamos *tūrio n imtimi*. Iš jos reikia spręsti apie nežinomą atsitiktinio dydžio skirstinį.

Sakykime, atsitiktinio dydžio X reikšmės yra

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n. \qquad (1)$$

Toliau jas vadinsime imties reikšmėmis. Šias reikšmes, užrašytas didėjančia tvarka

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n, \qquad (2)$$

vadinsime *variacine seka*.

Tarp (2) sekos narių gali būti ir lygių. Sakykime, (2) sekoje yra tik k skirtingų reikšmių ir x_1 reikšmė įgyjama n_1 kartų, x_2 įgyjama n_2 kartų, x_k įgyjama n_k kartų. Tuomet

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n, \qquad (3)$$

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \cdots + \frac{n_k}{n} = 1.$$

Skaičius n_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) vadinsime *dažniais*, o skaičius $\frac{n_i}{n}$ — *santykiniais dažniais*. Šiuo atveju vietoj (2) sekos patogiau naudotis lentele, kurios pirmojoje eilutėje nurodytos imties reikšmės, o antrojoje — tų reikšmių dažniai:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

, (5)

arba

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

(6)

(5) lentele aprašomas vadinamasis *imties statistinis skirstinys*, arba tiesiog *skirstinys*.

Skirtumą tarp variacinės sekos didžiausiojo ir mažiausiojo nario vadinsime *sekos variacijos pločiu* (arba *imties pločiu*) R:

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min} = x_k - x_1.} \quad (7)$$

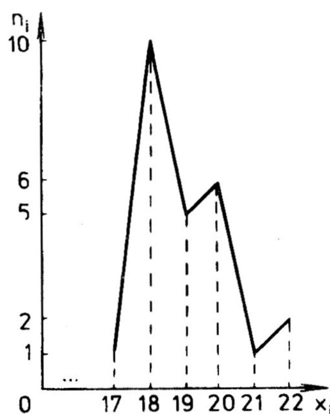
Variacijos plotis R apibūdina variacinės sekos kitimo intervalą.

1 pavyzdys. Apklausus 25 pirmojo kurso studentus, gauti tokie duomenys apie jų amžių: 18, 19, 20, 18, 18, 20, 18, 18, 19, 19, 21, 20, 18, 18, 19, 18, 18, 20, 17, 20, 22, 20, 18, 22, 19. Sudarysime studentų statistinio skirstinio pagal amžių lentelę:

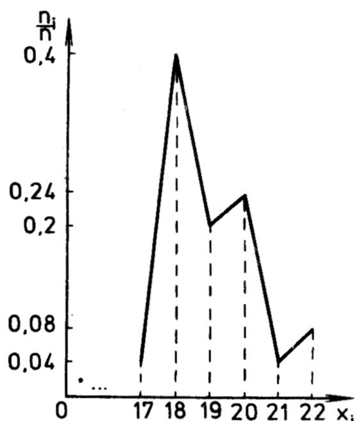
x_i	17	18	19	20	21	22	Σ
n_i	1	10	5	6	1	2	25
$\frac{n_i}{n}$	0,04	0,4	0,2	0,24	0,04	0,08	1

Lentelėje matome, kad $x_{\max}=22$ ir $x_{\min}=17$. Todėl $R=22-$ $-17=5$. Taigi grupės studentų amžiaus skirtumas ne didesnis už 5 metus.

Dažnai stebėjimų duomenys vaizduojami grafiškai. Plokštumoje parinkus koordinačių sistemą xOy ir, naudojantis (5) lentele, pažymėjus joje taškus (x_i, n_i) bei juos paeiliui sujungus atkarpomis, gaunama figūra, kuri vadinama *dažnių daugiakampiu*. Plokštumoje xOy pažymėjus taškus $\left(x_i, \frac{n_i}{n}\right)$, analogiškai galima nubraižyti *santykinių dažnių daugiakampį*. 194 paveiksle pavaizduotas 1 pavyzdyje nagrinėtos variacinės sekos dažnių daugiakam-



194 pav.



195 pav.

pis. Šios sekos santykinių dažnių daugiakampis (jis skiriasi nuo dažnių daugiakampio tik masteliu ašyje Oy) pavaizduotas 195 paveiksle (mastelis ašyje Oy padidintas 25 kartus).

Jeigu imties duomenų daug, tai jie grupuojami pagal tam tikrus intervalus (dažniausiai vienodo ilgio). Šiuo atveju randami imties x_{min} ir x_{max} ir parenkamas intervalas $[a_1, a_{k+1}]$, kuriam priklauso x_{min} ir x_{max}. Tas intervalas suskaidomas į k vienodo ilgio intervaliukų

$$[a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_k, a_{k+1}],$$

kurių ilgiai lygūs $h=\frac{a_{i+1}-a_i}{k}$, $i=1, 2, \dots, k$. Skaičius h vadinamas *variacijos žingsniu.* Sakykime, kad į intervaliuką $[a_i, a_{i+1})$ pateko n_i imties reikšmių. Laikysime, kad tos reikšmės yra vienodos ir lygios intervaliuko viduriui, kurį žymėsime z_i $\left(z_i=\frac{a_{i+1}-a_i}{2}\right)$.

Taigi vietoj imties (2) variacinės sekos nagrinėsime variacinę seką

$$z_1<z_2<z_3<\dots<z_k,$$

apibrėžtą vadinamąja *intervaline statistine lentele (intervaliniu statistiniu skirstiniu):*

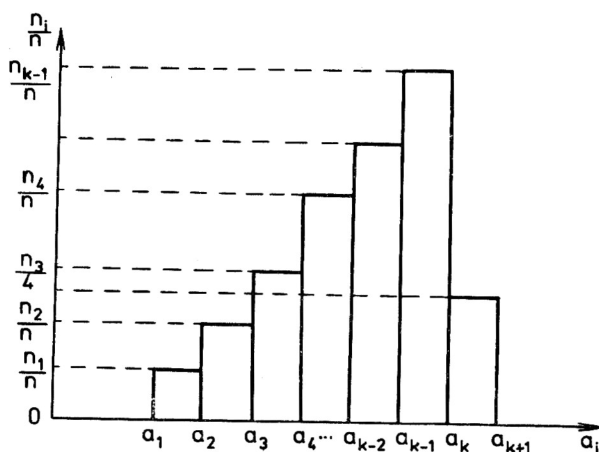
$[a_i, a_{i+1}]$	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1}]$
z_i	z_1	z_2	...	z_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

(8)

Šios lentelės duomenys grafiškai vaizduojami histograma. *Histograma* — tai laiptinė figūra, sudaryta iš stačiakampių, kurių pagrindai yra vienos tiesės intervalai $[a_i, a_{i+1})$, o aukštinės atitinkamai lygios $\frac{n_i}{n}$, $i=1, 2, 3, \dots, k$ (196 pav.).

2 pavyzdys. Saldainių fabrike atsitiktinai atrinkta 50 šokolado plytelių. Jas pasvėrus, gauti šitokie rezultatai (gramais):

100,5 99,6, 100,3, 99,3, 101,2, 102,4, 99,7, 98,3, 101,4,
101,6 99,7 102,7 98,8 100,7, 102,4, 101,3, 99,4, 100,5,
100,3, 101,1, 98,2 100,2, 100,1, 99,7 98,4, 97,2, 99,8,
101,2, 99,5 102,2 97,9, 99,1, 100,7, 99,2, 100,3, 99,3,
99,5, 100,2, 99,1 100,6, 99,8, 100,2, 99,4, 98,3, 99,7,
101,4, 102,5, 98,9 99,0, 100,1.

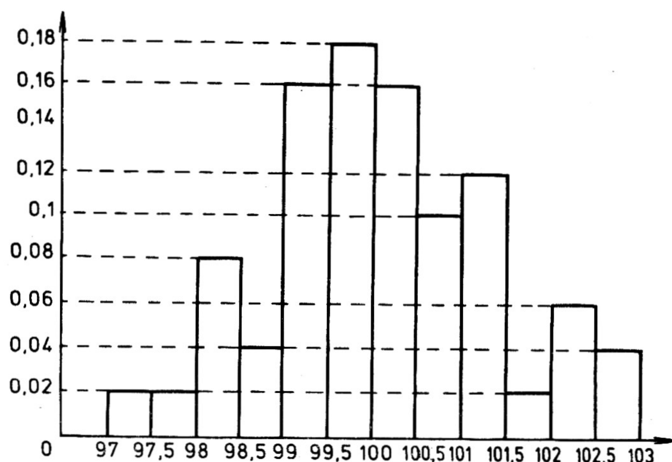


196 pav.

Sudarysime šokolado plytelių svorio X pasiskirstymo statistinę lentelę ir nubraižysime histogramą.

Kadangi $x_{min}=97,2$, o $x_{max}=102,7$, tai nagrinėsime intervalą [97, 103], kurį padalysime į $h=0,5$ ilgio intervaliukus ir sudarysime lentelę:

Intervalas	Vidurys	Dažnis	Santykinis dažnis
[97, 97,5)	97,25	1	0,02
[97,5, 98)	97,75	1	0,02
[98, 98,5)	98,25	4	0,08
[98,5, 99)	98,75	2	0,04
[99, 99,5)	99,25	8	0,16
[99,5, 100)	99,75	9	0,18
[100, 100,5)	100,25	8	0,16
[100,5, 101)	100,75	5	0,1
[101, 101,5)	101,25	6	0,12
[101,5, 102)	101,75	1	0,02
[102, 102,5)	102,25	3	0,06
[102,5, 103]	102,75	2	0,04
	Σ	50	1



197 pav.

Šio skirstinio histograma pavaizduota 197 paveiksle.

Imtyje dažniausiai pasitaikančio požymio reikšmė vadinama *imties moda* ir žymima Mo. Požymio reikšmė, kuri statistinį skirstinį dalija į dvi lygias dalis, vadinama *mediana* ir žymima Me. Kai $n=2k+1$, $\mathrm{Me}=x_{k+1}$, o kai $n=2k$, $\mathrm{Me}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$.

3 pavyzdys. Pasvėrus 100 obuolių, gauta šitokia imtis (gramais):

Svoris	25	36	41	60	75	80	91
Skaičius	5	7	13	26	33	9	7

Matome, kad Mo=75, t. y. imtyje yra daugiausia obuolių, sveriančių po 75 gramus, o Me=60.

Tūrio n imties, kurios statistinis skirstinys aprašytas (5) lentele, *vidurkiu* vadinsime požymio reikšmių aritmetinį vidurkį:

$$\overline{X}_I=\frac{x_1n_1+x_2n_2+x_3n_3+\ldots+x_kn_k}{n_1+n_2+\ldots+n_k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_in_i. \qquad (9)$$

Imties dispersija D_I vadinsime imties reikšmių nuokrypių nuo imties vidurkio kvadratų aritmetinį vidurkį:

$$D_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{X}_I)^2 n_i. \tag{10}$$

Dispersiją D_I skaičiuosime ir remdamiesi formule

$$D_I = \overline{(X^2)}_I - (\overline{X}_I)^2. \tag{11}$$

Kvadratinį nuokrypį apibrėšime formule

$$\sigma_I = \sqrt{D_I}. \tag{12}$$

Požymio reikšmių išsibarstymui apie imties vidurkį apibūdinti įvedamas *variacijos koeficientas* V:

$$V = \frac{\sigma_I}{\overline{X}_I} \cdot 100\,\%. \tag{13}$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime statistinio skirstinio

x_i	−4	2	0	3	5
n_i	3	1	4	2	5

vidurkį, dispersiją, kvadratinį nuokrypį ir variacijos koeficientą.

Šios imties tūris $n = 15$. Pagal (9) formulę

$$\overline{X}_I = \frac{(-4)\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 4 + 3\cdot 2 + 5\cdot 5}{15} = 1{,}4.$$

Imties reikšmių kvadratų vidurkis lygus

$$\overline{(X^2)}_I = \frac{(-4)^2\cdot 3 + 2^2\cdot 1 + 0^2\cdot 4 + 3^2\cdot 2 + 5^2\cdot 5}{15} = 13.$$

Remdamiesi (11) formule, gauname

$$D_I = 13 - 1{,}4^2 = 11{,}04.$$

Taigi kvadratinis nuokrypis lygus

$$\sigma_I = \sqrt{11{,}04} \approx 3{,}32$$

(dviejų ženklų po kablelio tikslumu), o variacijos koeficientas —

$$V=\frac{3,32}{1,4}\cdot 100\%=237,1\%.$$

Jeigu imties statistinis skirstinys yra apibrėžtas (8) lentele, tai vidurkio, dispersijos ir kvadratinio nuokrypio ieškosime imties požymio reikšmėmis laikydami intervalų $[a_i, a_{i+1})$ vidurius z_i ir jiems priskirdami dažnius n_i.

5 pavyzdys. Apskaičiuosime 2 pavyzdyje nagrinėto statistinio skirstinio vidurkį, dispersiją, kvadratinį nuokrypį ir variacijos koeficientą.

Remdamiesi (9)—(13) formulėmis, gauname

$$\overline{X}_I=\frac{97,25\cdot 1+97,75\cdot 1+98,25\cdot 2+...+102,75\cdot 2}{50}=100,09,$$

$$\overline{(X^2)}_I=\frac{97,25^2\cdot 1+97,75^2\cdot 1+...+102,75^2\cdot 2}{50}=10019,5825,$$

$$D_I=10019,5825-(100,09)^2=1,5744,\ \sigma_I=\sqrt{1,5744}=1,2548,$$

$$V=\frac{1,2548}{100,09}\cdot 100\%=1,25\%.$$

Imties vidurkį, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį galima nesunkiai apskaičiuoti naudojantis programuojamais skaičiuotuvais arba kita elektronine skaičiavimo technika. Tačiau, kai požymio reikšmių skaičius didelis ir kai tos reikšmės turi daug skaitmenų, vidurkio ir dispersijos skaičiavimas techniškai sudėtingas (reikia daug laiko duomenims įvesti į skaičiuotuvą, galimos įvedimo klaidos). Šiuo atveju vietoj atsitiktinio dydžio X (2) variacinės sekos nagrinėsime atsitiktinio dydžio $Z=\frac{X-C}{h}$, kuris įgyja reikšmes $z_i=\frac{x_i-C}{h}$, variacinę seką; čia C — bet koks skaičius, dažniausiai lygus $\text{Mo}X$, o $h=x_{i+1}-x_i$ (nagrinėjame tik pastovaus žingsnio variacines sekas). Kadangi $x_i-C=x_i-\text{Mo}X=x_i-x_l=(i-l)\cdot h$, tai z_i reikšmės yra sveikieji skaičiai. Vadinasi, atsitiktinio dydžio Z vidurkį ir dispersiją nesunku apskaičiuoti pagal (9) ir (11) formules. Remiantis 11 skyriuje išnagrinėtomis atsitiktinio dydžio matematinės vilties ir dispersijos savybėmis bei sąryšiu $X=Z\cdot h+$ $+C$, nesunku apskaičiuoti ir $\overline{X}_I$, $D_I(X)$. Iš tikrųjų

$$\overline{X}_I=\overline{(Z\cdot h+C)}_I=\overline{(Z\cdot h)}_I+\overline{C}_I=\overline{Z}_I\cdot h+C, \quad (14)$$

$$D_I(X)=D_I(Z\cdot h+C)=D_I(Z\cdot h)+D_I(C)=D_I(Z)\cdot h^2. \quad (15)$$

Kad būtų patogiau skaičiuoti Z_I ir $D_I(Z)$, sudarome lentelę:

X	Dažnis n_i	Pagalbinis kintamasis $z_i=\frac{x_i-C}{h}$	$n_i z_i$	$n_i z_i^2$	Kontrolinis stulpelis $n_i(z_i+1)^2$
x_1	n_1	z_1	$n_1 z_1$	$n_1 z_1^2$	$n_1(z_1+1)^2$
x_2	n_2	z_2	$n_2 z_2$	$n_2 z_2^2$	$n_2(z_2+1)^2$
...	...	...	...	...	...
x_k	n_k	z_k	$n_k z_k$	$n_k z_k^2$	$n_k(z_k+1)^2$
	Σn_i	—	$\Sigma n_i z_i$	$\Sigma n_i z_i^2$	$\Sigma n_i(z_i+1)^2$

Paskutinėje lentelės eilutėje surašytos stulpelių skaičių sumos. Paskutinio stulpelio skaičių suma turi būti lygi $\sum n_i+2\cdot\sum n_i z_i+ +\sum n_i z_i^2$. Tai nesunku patikrinti remiantis paskutine eilute. Aprašytasis metodas vadinamas *sandaugų metodu*. Atkreipsime dėmesį, kad stulpelio $n_i z_i^2$ skaičiai gaunami iš stulpelio $n_i z_i$ skaičių, juos atitinkamai padauginus iš z_i.

6 pavyzdys. Remdamiesi sudarytąja lentele, apskaičiuosime 2 pavyzdyje nagrinėto statistinio skirstinio vidurkį ir dispersiją. Sudarome lentelę:

Intervalai	Intervalų viduriai x_i	Dažniai n_i	$z_i=\frac{x_i-C}{h}$, $C=99{,}75$, $h=0{,}5$	$z_i n_i$	$z_i^2 n_i$	$n_i(z_i+1)^2$
[97,0, 97,5)	97,25	1	—5	—5	25	16
[97,5, 98,0)	97,75	1	—4	—4	16	9
[98,0, 98,5)	98,25	4	—3	—12	36	16
[98,5, 99,0)	98,75	2	—2	—4	8	2
[99,0, 99,5)	99,25	8	—1	—8	8	0
[99,5, 100,0)	99,75	9	0	0	0	9
[100,0, 100,5)	100,25	8	1	8	8	32
[100,5, 101,0)	100,75	5	2	10	20	45
[101,0, 101,5)	101,25	6	3	18	54	96
[101,5, 102,0)	101,75	1	4	4	16	25
[102,0, 102,5)	102,25	3	5	15	75	108
[102,5, 103,0]	102,75	2	6	12	72	98
		$\Sigma n_i=50$	—	$\Sigma=34$	$\Sigma=338$	$\Sigma=456$

Iš lentelės paskutinės eilutės gauname

$$50+2\cdot 34+338=456.$$

Taigi lentelę sudarėme be klaidų.

Pagal (9) ir (11) formules

$$\overline{Z}_I = \frac{34}{50} = 0{,}68, \quad D_I(Z) = \frac{338}{50} - \left(\frac{34}{50}\right)^2 = 6{,}2976,$$

o pagal (14) ir (15) formules

$$\overline{X}_I = 0{,}68 \cdot 0{,}5 + 99{,}75 = 100{,}09, \quad D_I(X) = 6{,}2976 \cdot (0{,}5)^2 = 1{,}5744.$$

12.3. Skirstinių parametrų skaitiniai įverčiai. Stjudento skirstinys

Sakykime, atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Normalusis dėsnis apibūdinamas dviem parametrais: matematine viltimi $a = M(X)$ ir kvadratiniu nuokrypiu $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Su atsitiktiniu dydžiu X atlikta n bandymų. Juose X įgijo x_1, x_2, ..., x_k reikšmes, kurių dažniai atitinkamai lygūs n_1, n_2, ..., n_k. Kyla klausimas, kaip iš šių duomenų rasti apytiksles nežinomas skirstinio parametrų reikšmes. Tos reikšmės priklauso nuo (x_1, x_2, ..., x_k, n_1, n_2, ..., n_k) ir vadinamos statistiniais nežinomų parametrų įverčiais. Tegul Θ yra vertinamasis parametras (matematinė viltis arba dispersija), o Θ^* — to parametro statistinis įvertis. Θ^* taip pat yra atsitiktinis dydis, turintis savo skirstinį. Statistikoje reikalaujama, kad įvertis tenkintų šiuos reikalavimus:

1) statistinis įvertis turi būti *nepaslinktasis,* t. y. $M\Theta^* = \Theta$;

2) įvertis turi būti *efektyvus,* t. y. jo dispersija turi būti minimali;

3) įvertis turi būti *pagrįstas,* t. y. didėjant n Θ^* turi artėti prie Θ, arba $D(\Theta^*) \to 0$, kai $n \to \infty$.

1 teorema. *Imties vidurkis $\overline{X}_I$ yra atsitiktinio dydžio X matematinės vilties $M(X)$ įvertis, tenkinantis* 1—3 *reikalavimus.*

Įrodymas. Sakykime, kad imtis yra reprezentatyvi, t. y. visi generalinės aibės elementai turi vienodą galimybę patekti į imtį. Požymio reikšmes x_1, x_2, x_3, ..., x_n galime laikyti nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių (kaip ir X) atsitiktinių dydžių X_1, X_2, X_3, ..., X_n reikšmėmis. Kadangi $M(X_i) = M(X)$, $D(X_i) = DX$, tai

$$M(\overline{X}_I) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot nM(X) = M(X),$$

$$D(\overline{X}_I) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2} nD(X) =$$

$$= \frac{D(X)}{n} \to 0, \text{ kai } n \to \infty.$$

Taigi įvertis $\overline{X}_I$ yra nepaslinktas ir pagrįstas. Galima įrodyti, kad jis yra ir efektyvus.

Natūralu dispersijos $D(X)$ įverčiu laikyti imties dispersiją D_I. Galima įrodyti, kad šis įvertis yra efektyvus ir pagrįstas. Tačiau pasirodo, kad jis yra paslinktas, t. y.

$$M(D_I) = \frac{n-1}{n} M(D).$$

Kad gautume nepaslinktąjį dispersijos įvertį, turime nagrinėti ne dispersiją D_I, o $s^2 = \frac{n}{n-1} D_I$, kuri vadinama *pataisytąja empirine dispersija.*

Kadangi s^2 nuo D_I skiriasi tik daugikliu $\frac{n}{n-1}$, kuris artėja prie 1, kai $n \to \infty$, tai su didelėmis n reikšmėmis praktiškai nesvarbu kuriuo iš tų įverčių naudosimės.

2 teorema. *Pataisytoji empirinė dispersija s^2 yra nepaslinktas, efektyvus ir pagrįstas dispersijos $D(X)$ įvertis.*

Įrodymas. Pataisytosios empirinės dispersijos s^2 matematinė viltis lygi

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_I\right) = \frac{n}{n-1} M(D_I) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} M(D) = M(D).$$

Taigi s^2 yra dispersijos $D(X)$ nepaslinktasis įvertis. Šio įverčio efektyvumo ir pagrįstumo neįrodinėsime.

Nežinomo parametro Θ įvertis vienu skaičiumi Θ^* vadinamas *taškiniu parametro įverčiu.*

1 ir 2 teoremos yra labai bendros ir jose nenurodomas įverčių tikslumas. Iš įverčių pagrįstumo išplaukia, kad didėjant imties tūriui n, tikimybė $P(|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon) \to 1$. ε vadinamas *įverčio tikslumu.*

Sakykime, iš eksperimento duomenų gautas parametro Θ įvertis Θ^*. Kaip įvertinti galimą paklaidą?

Tikimybę $P(|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon) = \gamma$, su kuria teisinga nelygybė $|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon$, vadinsime *įverčio pasikliovimo tikimybe.* Ji apibūdina įverčio patikimumą. Kadangi Θ^* yra atsitiktinis dydis, tai nelygybė $|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon$ teisinga ne absoliučiai, o su tikimybe γ. Nelygybė $|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon$ ekvivalenti nelygybių sistemai:

$$\Theta^* - \varepsilon < \Theta < \Theta^* + \varepsilon. \tag{1}$$

Intervalas $(\Theta^* - \varepsilon, \Theta^* + \varepsilon)$, kuriam su tikimybe γ priklauso parametras Θ, vadinamas šio parametro *pasikliautinuoju intervalu.*

12.3.1. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, matematinės vilties $M(X)$ pasikliautinasis intervalas, kai žinomas šio dydžio X kvadratinis nuokrypis σ. 1 teoremoje įrodėme, kad atsitiktinio dydžio X matematinės vilties įvertis yra imties vidurkis $\overline{X}_I$, kuris savo ruožtu yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Rasime šio dydžio matematinės vilties pasikliautinąjį intervalą. Kadangi

$$M(\overline{X}_I)=M(X)=a,\quad D(\overline{X}_I)=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n},$$

tai

$$\sigma(\overline{X}_I)=\sqrt{D(\overline{X}_I)}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Atsitiktiniam dydžiui $\overline{X}_I$ pritaikę 11.14.2 skyrelio (6) formulę, gauname

$$P(|\overline{X}_I-M(\overline{X}_I)|<\varepsilon)=\gamma=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\overline{X}_I)}\right).$$

Į šią lygybę įrašę $M(\overline{X}_I)$ ir $\sigma(\overline{X}_I)$ išraiškas, turime

$$\boxed{P(|\overline{X}_I-a|<\varepsilon)=\gamma=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right).} \tag{2}$$

(2) formulė sieja tris dydžius γ, n ir ε. Žinant du iš jų, galima rasti trečiąjį. Paprastai imama γ, lygi arba 0,9, arba 0,95, arba 0,99. Tuomet (2) formule aprašomas imties tūrio n ir įverčio tikslumo ε sąryšis.

Įvedę pagalbinį kintamąjį $t=\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{\sigma}$, (2) formulę užrašome šitaip:

$$P\left(|\overline{X}_I-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t),$$

arba

$$\boxed{P\left(\overline{X}_I-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}_I+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t).} \tag{3}$$

Taigi matematinės vilties $M(X)=a$ pasikliautinasis intervalas yra

$$\left(\overline{X}_I-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_I+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right); \tag{4}$$

čia t reikšmė randama iš lygties

$$2\Phi(t)=\gamma, \tag{5}$$

remiantis priedo 2 lentele.

Iš lygybės $t=\frac{\sqrt{n}\cdot\varepsilon}{\sigma}$ gauname

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon^2}. \qquad (6)$$

Taip apskaičiuotas n yra minimalus imties tūris, kad matematinė viltis patektų į pasikliautinąjį intervalą su žinoma tikimybe γ.

Pavyzdžiai. 1. Atsitiktinis dydis X, kurio kvadratinis nuokrypis $\sigma=3$, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Rasime šio dydžio matematinės vilties pasikliautinąjį intervalą su tikimybe $\gamma=0{,}95$, kai $n=90$ ir $\overline{X}_I=1{,}4$.

Iš lygybės $2\Phi(t)=0{,}95$ arba $\Phi(t)=0{,}475$, remdamiesi priedo 2 lentele, randame t reikšmę: $t=1{,}96$. Vadinasi, matematinės vilties $M(X)$ pasikliautinasis intervalas yra

$$\left(1{,}4-\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{90}},\ 1{,}4+\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{90}}\right)=(0{,}8,\ 2{,}0).$$

2. Jūros gylis matuojamas prietaisu, kurio matavimo atsitiktinės paklaidos pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį, kurio $\sigma=15$ m. Rasime, kiek reikia atlikti matavimų, kad jūros gylį būtų galima nustatyti su paklaida, ne didesne už 5 m ir su pasikliovimo tikimybe 0,9.

Iš lygybės $\Phi(t)=\frac{0{,}9}{2}=0{,}45$, remdamiesi priedo 2 lentele, randame t: $t=1{,}65$. Iš (6) formulės išplaukia, kad

$$n=\frac{1{,}65^2\cdot 15^2}{5^2}=24{,}5.$$

Vadinasi, reikia atlikti mažiausiai 25 jūros gylio matavimus.

12.3.2. Atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, matematinės vilties $M(X)=a$ pasikliautinasis intervalas, kai nežinomas kvadratinis nuokrypis. Daugeliu atvejų yra nežinomas tiriamojo požymio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, kvadratinis nuokrypis. Kai imtis didelė ($n\geqslant 30$), vietoj $\sigma(X)$ imamas pataisytas imties kvadratinis nuokrypis $s=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_I}$, mažai tesiskiriantis nuo $\sigma(X)$. Šiuo atveju įrodoma, kad matematinės vilties $M(X)$ pasikliautinasis intervalas yra

$$\overline{X}_I-\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}<M(X)<\overline{X}_I+\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}. \qquad (7)$$

3 pavyzdys. Laikydami, kad obuolių svoris X yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, ir remdamiesi 12.2 sky-

relio 3 pavyzdžiu, su pasikliovimo tikimybe $\gamma=0{,}95$ rasime matematinės vilties $M(X)$ pasikliautinąjį intervalą.

Remsimės (7) formule. Kadangi $t=1{,}96$ (žr. 1 pavyzdį), $\overline{X}_I=63{,}02$, $s=17{,}89$, tai

$$\overline{X}_I-\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}=63{,}02-\frac{1{,}96\cdot 17{,}89}{\sqrt{100}}=59{,}5,$$
$$\overline{X}_I+\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}=63{,}02+\frac{1{,}96\cdot 17{,}89}{\sqrt{100}}=66{,}5.$$

Taigi su tikimybe 0,95 matematinė viltis $M(X)$ priklauso intervalui (59,5, 66,5).

Kai imtis maža ($n<30$), remdamiesi (7) formule, gautume netikslų ir didelį matematinės vilties pasikliautinąjį intervalą. Anglų matematikas Gosetas (slapyvardžiu Stjudentas) įrodė, kad, esant mažai imčiai, teisinga formulė

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\overline{X}_I-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|<\alpha\right)=\gamma=s(n,\ \alpha);} \qquad (8)$$

čia $s(n,\ \alpha)$ — Stjudento pasiskirstymo funkcija. Iš lygybės $\gamma=s(n,\ \alpha)$ išreiškiame $\alpha=\alpha(n,\ \gamma)$. Yra sudaryta funkcijos $\alpha(n,\ \gamma)$ reikšmių lentelė (priedo 4 lentelė).

Iš (8) formulės išplaukia, kad nelygybė

$$\left|\frac{\overline{X}_I-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|<\alpha$$

arba jai ekvivalenti nelygybių sistema

$$\overline{X}_I-\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}_I+\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}}$$

teisinga su tikimybe γ (dažniausiai imama γ, lygi arba 0,95, arba 0,99, arba 0,999).

Taigi matematinės vilties $M(X)=a$ pasikliautinasis intervalas yra

$$\left(\overline{X}_I-\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_I+\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}}\right).$$

Į šį intervalą $M(X)$ patenka su tikimybe γ.

4 pavyzdys. Norint nustatyti detalių partijos detalės vidutinį svorį, atsitiktinai buvo atrinkta 20 detalių imtis ir apskaičiuota, kad $\overline{X}_I=400$ g, o $s=2$ g. Su tikimybe 0,95 rasime detalės vidutinio svorio pasikliautinąjį intervalą.

Kai $n=20$, $\gamma=0,95$, iš priedo 4 lentelės randame α: $\alpha=2,09$. Vadinasi,

$$\overline{X}_l-\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}}=400-\frac{2\cdot 2,09}{\sqrt{20}}=399,1,\quad \overline{X}_l+\frac{s\cdot\alpha}{\sqrt{n}}=400+\frac{2\cdot 2,09}{\sqrt{20}}=401.$$

Taigi su tikimybe 0,95 detalių partijos detalės svorio vidurkio pasikliautinasis intervalas yra (399,1, 401).

12.3.3. Kvadratinio nuokrypio pasikliautinasis intervalas. Jeigu atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, tai kvadratinis nuokrypis $\sigma(X)$ įvertinamas remiantis formule

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\sigma(X)}{s}-1\right|<\beta\right)=\gamma=\psi(n,\ \beta);} \tag{10}$$

čia $\psi(n,\ \beta)$ — speciali funkcija. Iš lygybės $\gamma=\psi(n,\ \beta)$ išreiškiame β: $\beta=\beta(n,\ \gamma)$. Yra sudaryta funkcijos $\beta(n,\ \gamma)$ reikšmių lentelė (priedo 5 lentelė).

Nelygybė

$$\left|\frac{\sigma(X)}{s}-1\right|<\beta$$

ekvivalenti nelygybių sistemai.

$$s-\beta\cdot s<\sigma(X)<s+\beta\cdot s. \tag{11}$$

Taigi kvadratinis nuokrypis $\sigma(X)$ į pasikliautinąjį intervalą $(s-\beta\cdot s,\ s+\beta\cdot s)$ patenka su tikimybe γ.

5 pavyzdys. Iš didelės detalių partijos atsitiktinai atrinkta 20 detalių, išmatuoti jų ilgiai ir apskaičiuotas patikslintas kvadratinis nuokrypis $s=0,5$ cm. Su pasikliovimo tikimybe 0,99 rasime visos detalių partijos kvadratinio nuokrypio pasikliautinąjį intervalą.

Kai $n=20$, $\gamma=0,99$, iš priedo 5 lentelės randame β: $\beta=0,58$. Remdamiesi (11) formule, randame kvadratinio nuokrypio pasikliautinąjį intervalą: (0,21, 0,79).

12.3.4. Binominio skirstinio tikimybės pasikliautinasis intervalas. Nagrinėsime eksperimentą, kuriame įvykio A pasirodymo tikimybė nežinoma. Norint ją apytiksliai nustatyti, atliekama n nepriklausomų bandymų ir randamas įvykio A pasirodymų dažnis $\bar{p}=\frac{S_n}{n}$; čia S_n — įvykio A pasirodymo n bandymuose skaičius. Jeigu n pakankamai didelis ($n>50$, $S_n>5$, $n-S_n>5$), atsitiktinis dy-

dis $\bar{p}$ yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. **11.15** įrodėme, kad $M\bar{p}=p$ ir $D(\bar{p})=\frac{p\cdot q}{n}$, $\sigma(\bar{p})=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$. Vadinasi, $D(\bar{p})\to 0$, kai $n\to\infty$, ir $\bar{p}$ galima laikyti nežinomos tikimybės įverčiu. Atsitiktiniam dydžiui $\bar{p}$ pritaikę **11.14** skyrelio (6) formulę, turime:

$$\boxed{P(|\bar{p}-p|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).} \tag{12}$$

Iš čia su tikimybe γ ieškosime tikimybės p pasikliautinojo intervalo. (12) formulės dešinėje pusėje nežinomą tikimybę p pakeitę jos įverčiu $\frac{S_n}{n}$, gauname:

$$\boxed{P(|\bar{p}-p|<\varepsilon)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}\right)=\gamma.} \tag{13}$$

Taigi tikimybės p pasikliautinasis intervalas yra $\left(\frac{S_n}{n}-\varepsilon, \frac{S_n}{n}+\varepsilon\right)$, kai ε randamas iš lygties

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}\right)=\gamma. \tag{14}$$

6 pavyzdys. Su pasikliovimo tikimybe $\gamma=0{,}95$ rasime detalių partijos brokuotinų detalių tikimybės pasikliautinąjį intervalą, jeigu iš šios partijos atsitiktinai sudarytoje tūrio $n=625$ imtyje yra 40 brokuotinų detalių. Kadangi $n=625$, $S_n=40$, $\gamma=0{,}95$, tai $\bar{p}=\frac{S_n}{n}=\frac{40}{625}=0{,}064$, ir iš (14) formulės gauname:

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot 25\cdot 625}{\sqrt{40\cdot 585}}\right)=0{,}475.$$

Iš čia pagal priedo 2 lentelę randame

$$\frac{\varepsilon\cdot 25\cdot 625}{\sqrt{40\cdot 585}}=1{,}96,$$

t. y. $\varepsilon=0{,}02$. Vadinasi, brokuotinų detalių tikimybės pasikliautinasis intervalas yra

$$(0{,}064-0{,}02,\ 0{,}064+0{,}02)=(0{,}044,\ 0{,}084).$$

Jeigu brokuotinų detalių tikimybę išreikšime procentais, tai šios tikimybės pasikliautinasis intervalas bus (4,4%, 8,4%).

12.4. Produkcijos kontrolės statistinis metodas

Gaminamos produkcijos kokybei kontroliuoti labiausiai tinka statistiniai metodai. Iš įvairių statistinės kontrolės būdų trumpai susipažinsime su imties vidurkio kontrole. Šiuo atveju gaunama tiksliausia informacija apie kontroliuojamąjį parametrą.

Sakykime, X yra gamybos proceso metu kontroliuojamas atsitikinis dydis, pavyzdžiui, detalės svoris, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį.

Matematinė viltis $M(X)=a$ vadinama *atsitiktinio dydžio X projektine reikšme*. Maksimalus nuokrypis Δ nuo $a=M(X)$, su kuriuo detalė dar laikoma standartine, vadinamas *leistinuoju nuokrypiu*. Laikysime, kad yra žinomas atsitiktinio dydžio X kvadratinis nuokrypis $\sigma(X)=\sigma$.

Gamybos proceso kontrolei iš pagamintos produkcijos reguliariai (pavyzdžiui, kas valandą) imama tūrio n imtis. Jeigu tos imties vidurkis $\overline{X}_I$, tai parametro a pasikliautinasis intervalas yra

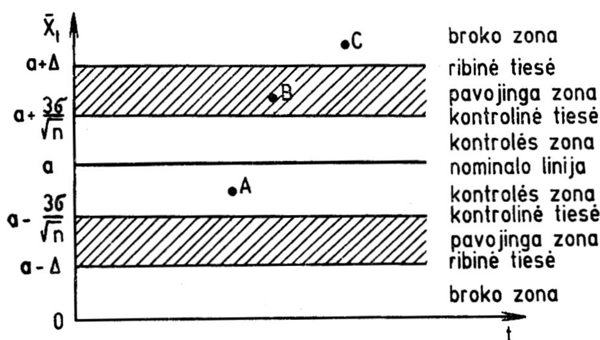
$$\overline{X}_I-\frac{\varepsilon\cdot\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}_I+\frac{\varepsilon\cdot\sigma}{\sqrt{n}},$$

į kurį a patenka su tikimybe $\gamma=2\Phi(\varepsilon)$. Kai $\varepsilon=3$, pasikliovimo tikimybė γ lygi $2\Phi(3)=0{,}997$. Tada nelygybę

$$\overline{X}_I-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}_I+\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

galima laikyti absoliučiai teisinga.

Stebėjimų rezultatai vaizduojami statistiniame kontrolės lape (198 pav.), kuriame nubrėžtos dvi ašys: horizontalioji ašis Ot, kurioje žymimas imties sudarymo laikas, ir vertikalioji ašis $O\overline{X}_I$,



198 pav.

kurioje žymimi atitinkamų imčių vidurkiai. Atstumu $a=M(X)$ nubrėžiama tiesė, lygiagreti ašiai Ot — *nominalo linija* ir nuo jos atstumu $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ nubrėžiamos dvi lygiagrečios tiesės — *kontrolinės*. Juosta, esanti tarp tų tiesių, vadinama *kontrolės zona*. Taip pat nubrėžiamos dvi tiesės $\overline{X}_l=a-\Delta$ ir $\overline{X}_l=a+\Delta$, kurios vadinamos *ribinėmis tiesėmis*. Tarp kontrolinių ir ribinių tiesių yra *pavojingoji zona* (198 paveiksle ji užbrūkšniuota). Už ribinių tiesių yra *broko zona*. Paprastai reikalaujama, kad būtų $\Delta \geqslant \frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$. Jeigu imties vidurkis patenka į kontrolės zoną (taškas A), tai gamyba vyksta normaliai. Kai imties vidurkis patenka į pavojingąją zoną (taškas B) — reikia tikrinti gamybos procesą. Imties vidurkiui patekus į broko zoną (taškas C), reikia stabdyti gamybą ir aiškintis gamybos režimo sutrikimus.

12.5. Funkcinė ir statistinė priklausomybė

Praktikoje dažnai tenka vienu metu tirti du ar daugiau atsitiktinių dydžių. Paprastumo dėlei apsiribosime tik dviem atsitiktiniais dydžiais.

Sakykime, kad tarp atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y yra *funkcinė priklausomybė*, jeigu kiekvieną dydžio X reikšmę atitinka vienintelė dydžio Y reikšmė. Galimas ir toks atvejis, kai X ir Y yra nepriklausomi. Bendruoju atveju kiekvieną dydžio X reikšmę atitinka keletas dydžio Y reikšmių, kurios kartojasi skirtingais dažniais. Kitaip sakant, kiekvieną dydžio X reikšmę atitinka dydžio Y reikšmių skirstinys.

Pavyzdžiui, tirdami vikio ankšties svorio (atsitiktinis dydis Y) priklausomybę nuo sėklų skaičiaus ankštyje (atsitiktinis dydis X), galime pastebėti, kad didėjant sėklų skaičiui ankštyje, jos svoris didėja. Tačiau ši priklausomybė nėra vienareikšmė. Galima rasti daug skirtingo svorio ankščių su vienodu skaičiumi sėklų. 40 ankščių tyrimo duomenys surašyti lentelėje (X — sėklų skaičius ankštyje, Y — ankšties svoris gramais)

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8	0,7	4	0,2	7	0,6	9	0,9	7	0,6
4	0,1	4	0,3	5	0,3	7	0,4	3	0,3
3	0,2	9	0,8	7	0,7	6	0,7	7	0,7
5	0,3	6	0,5	4	0,3	5	0,4	5	0,4

8	0,5	9	0,7	7	0,6	8	0,6	2	0,1		
6	0,5	5	0,4	5	0,5	6	0,4	7	0,5		
6	0,5	6	0,4	3	0,1	8	0,8	4	0,4		
6	0,5	10	1,0	5	0,6	8	0,7	6	0,3		

Ši lentelė vadinama *paprastąja koreliacine lentele.* Joje matyti, kad ankštį su vienodu skaičiumi sėklų atitinka svorio reikšmių skirstinys. Pavyzdžiui, kai $X=5$, Y reikšmę 0,3 įgyja 2 kartus, 0,4 — 3 kartus ir 0,5, 0,6 — po vieną kartą, t. y. dydžio X reikšmę 5 atitinka dydžio Y reikšmių skirstinys.

Y	0,3	0,4	0,5	0,6
n	2	3	1	1

(2)

Aišku, kad ir kiekvieną dydžio Y reikšmę atitinka X reikšmių skirstinys.

Sakysime, kad du dydžiai X ir Y susieti *statistine priklausomybe,* kai vieną dydžio reikšmę atitinka kito dydžio reikšmių skirstinys.

Kai stebėjimo duomenų yra daug, tirti statistinę priklausomybę remiantis paprastąja koreliacine lentele gana sudėtinga. Todėl duomenys grupuojami ir sudaroma koreliacinė lentelė. Pavyzdžiui, iš (1) lentelės sudaroma šitokia koreliacinė lentelė (3):

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ankščių sk.
0,1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	3
0,2	—	1	1	—	—	—	—	—	—	2
0,3	—	1	2	2	1	—	—	—	—	6
0,4	—	—	1	3	2	1	—	—	—	7
0,5	—	—	—	1	3	1	1	—	—	6
0,6	—	—	—	1	1	3	1	—	—	6
0,7	—	—	—	—	1	2	2	1	—	6
0,8	—	—	—	—	—	—	1	1	—	2
0,9	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Ankščių sk.	1	3	5	7	8	7	5	3	1	40

Skaičiai, esantys lentelės vidiniuose langeliuose, reiškia ankščių, kurias atitinka duotoji X ir Y pora, skaičių. Pavyzdžiui, $X=7$, $Y=0{,}6$ atitinka tris ankštis, $X=5$, $Y=0{,}3$ — dvi ankštis ir t. t.

Bendruoju atveju dviejų atsitiktinių dydžių X ir Y koreliacinė lentelė yra tokia:

Y \ X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	[illegible]
y_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1i}	...	n_{1k}	[illegible]
y_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2i}	...	n_{2k}	[illegible]
...	...	...	...	...	...	...	
y_l	n_{l1}	n_{l2}	...	n_{li}	...	n_{lk}	[illegible]
...	...	...	...	...	...	...	
y_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pi}	...	n_{pk}	[illegible]
n_x	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k	[illegible]

(4)

Šioje lentelėje $x_i (i=1, 2, \ldots, k)$ ir $y_l (l=1, 2, \ldots, p)$ reiškia atskiras atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmes, o n_{li} — dažnius, rodančius, kiek kartų pasikartoja poros (x_i, y_l) reikšmės. Paskutiniame lentelės stulpelyje ir paskutinėje eilutėje yra atitinkamų eilučių ir stulpelių dažnių sumos, t. y.

$$n_l = n_{l1} + n_{l2} + \cdots + n_{lk} = \sum_{i=1}^{k} n_{li}, \quad m_i = \sum_{l=1}^{p} n_{li}. \tag{5}$$

Jeigu (x_i, y_l) reikšmės įgyjamos tik vieną kartą, tai vietoj (4) bendrosios koreliacinės lentelės naudojamasi paprastesne lentele:

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

(6)

Iš bendrosios (4) koreliacinės lentelės išplaukia, kad kiekvieną atsitiktinio dydžio X reikšmę atitinka atsitiktinio dydžio Y reikšmių skirstinys ir atvirkščiai, kiekvieną atsitiktinio dydžio Y reikšmę atitinka atsitiktinio dydžio X reikšmių skirstinys. Pavyzdžiui, kai $X=x_i$, skirstinys

y_l	y_1	y_2	...	y_p
n_{li}	n_{1i}	n_{2i}	...	n_{pi}

(7)

vadinamas atsitiktinio dydžio Y sąlyginiu skirstiniu.

Pirmasis ir paskutinis (4) lentelės stulpeliai apibrėžia *besąlyginį atsitiktinio dydžio Y skirstinį:*

Y	y_1	y_2	...	y_p
n_y	n_1	n_2	...	n_p

(8)

Analogiškai, kai $Y=y_l$, turime atsitiktinio dydžio X sąlyginį skirstinį

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_{li}	n_{l1}	n_{l2}	...	n_{lk}

(9)

Pirmoji ir paskutinė (4) bendrosios koreliacinės lentelės eilutės apibrėžia atsitiktinio dydžio X besąlyginį skirstinį:

X	x_1	x_2	...	x_k
n_x	m_1	m_2	...	m_k

(10)

Atsitiktinio dydžio X sąlyginio skirstinio, kai $Y=y_l$, vidurkį žymėsime $\overline{X}_l$ ir vadinsime *sąlyginiu vidurkiu:*

$$\overline{X}_l=\frac{1}{n_l}\sum_{i=1}^{k}n_{li}x_i. \tag{11}$$

Analogiškai skaičius

$$\overline{Y}_i=\frac{1}{m_i}\sum_{l=1}^{p}n_{li}y_l. \tag{12}$$

vadinamas *atsitiktinio dydžio Y sąlyginio skirstinio,* kai $X=x_i$, *vidurkiu.*

Sakysime, kad *atsitiktinis dydis Y yra koreliacinėje priklausomybėje nuo X*, jei kiekvieną X reikšmę x_i atitinka atsitiktinio dydžio Y sąlyginio skirstinio vidurkis $\overline{Y}_i$ ir skirtingas x_i reikšmes atitinka skirtingos $\overline{Y}_i$ reikšmės. Aišku, kad vieną x_i reikšmę atitinka vienintelė $\overline{Y}_i$ reikšmė. Taigi koreliacinė Y priklausomybė nuo X yra funkcinė.

Kintamąjį sąlyginį vidurkį $\overline{Y}_i$, priklausantį nuo x, pažymėję $\overline{Y}_x$, turime

$$\overline{Y}_x=f(x). \tag{13}$$

(13) lygtis vadinama *teorine regresijos lygtimi,* o jos grafikas — *regresijos kreivė.*

Analogiškai apibrėžiama *atsitiktinio dydžio X koreliacinė priklausomybė nuo atsitiktinio dydžio Y:*

$$\overline{X}_y = g(y). \qquad (14)$$

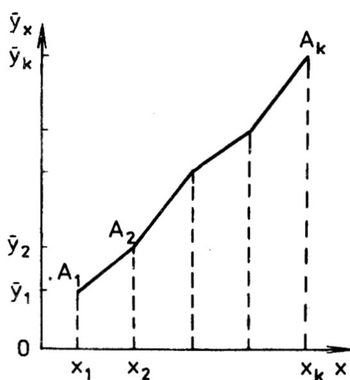
Norint nustatyti regresijos lygtį, reikia statistiškai ištirti atsitiktinius dydžius X ir Y bei rezultatus surašyti į koreliacinę lentelę. Iš gautų duomenų randamas kiekvienai atsitiktinio dydžio X reikšmei x_i sąlyginis vidurkis $\overline{Y}_i$ ir sudaroma nauja lentelė:

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
$\overline{Y}_i$	$\overline{Y}_1$	$\overline{Y}_2$	...	$\overline{Y}_i$	...	$\overline{Y}_k$
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k

(15)

Taškus $A_i(x_i, \overline{Y}_i)$ pažymėkime koordinačių $xO\overline{Y}_x$ sistemoje. Dažnis m_i rodo, kad į tašką $(x_i, \overline{Y}_i)$ žiūrima kaip į m_i skirtingų taškų. Sujungę pažymėtus taškus paeiliui atkarpomis, gauname laužtę (199 pav.), kuri vadinama *empirine regresijos kreive*. Ji daugiau ar mažiau skiriasi nuo teorinės regresijos kreivės.

Iš koreliacinės lentelės galima sudaryti dar vieną lentelę, aprašančią y_l ir $\overline{X}_l$ sąryšį. Koordinačių sistemoje $\overline{X}_yOy$ pažymėję taškus $B_l(\overline{X}_l, y_l)$ ir juos paeiliui sujungę atkarpomis, gausime kitą empirinę regresijos kreivę, apibūdinančią X priklausomybę nuo Y.



199 pav.

12.6. Tiesinė regresijos lygtis

Sakykime, kad iš empirinės regresijos lygties ar kitų samprotavimų nustatyta, kad tarp atsitiktinių dydžių X ir Y yra tiesinė koreliacinė priklausomybė, išreikšta regresijos lygtimi

$$\overline{Y}_x = ax + b, \tag{1}$$

arba

$$\boxed{\overline{Y}_x - ax - b = 0.} \tag{2}$$

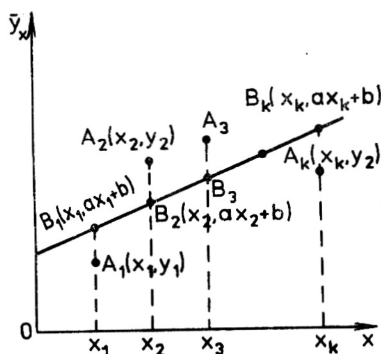
Remdamiesi koreliacinės lentelės duomenimis, rasime parametrų a ir b reikšmes. Pirmiausia išnagrinėsime paprasčiausią atvejį, kai atsitiktinių dydžių X ir Y priklausomybė aprašyta 12.5 skyrelio (6) lentele. Jeigu visi taškai (x_i, y_i) priklausytų vienai tiesei, tai pastaroji ir būtų ieškomoji regresijos tiesė. Šios tiesės lygties parametrus a ir b rastume iš *sistemos*

$$\begin{cases} y_1 - ax_1 - b = 0, \\ y_2 - ax_2 - b = 0, \end{cases}$$

sudarytos remiantis reikalavimais, kad taškai (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) priklausytų regresijos tiesei. Tačiau praktiškai tik labai retais atvejais visi (6) lentelės taškai priklauso regresijos tiesei. Todėl ieškosime tokių a ir b reikšmių, kad regresijos tiesė būtų „arčiausiai" visų taškų (x_i, y_i), t. y. atkarpų A_iB_i ilgių kvadratų suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} (A_iB_i)^2 \tag{3}$$

būtų mažiausia. Čia taškai A_i ir B_i turi tas pačias abscises x_i, o jų ordinatės atitinkamai lygios y_i ir $ax_i + b$ (200 pav.). Toks



200 pav.

parametrų a ir b radimo metodas vadinamas *mažiausiųjų kvadratų metodu.* Kadangi $A_iB_i = |ax_i + b - y_i|$, tai iš (3) lygybės gauname

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{4}$$

Funkcija S priklauso nuo dviejų kintamųjų a ir b. Ji įgyja mažiausią reikšmę su tomis a ir b reikšmėmis, su kuriomis $S'_a = 0$, $S'_b = 0$. Kadangi

$$S'_a = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i,$$

$$S'_b = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i),$$

tai a ir b reikšmes rasime išsprendę sistemą

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0, \end{cases}$$

arba

$$\boxed{\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}} \tag{5}$$

Jeigu atsitiktinių dydžių X ir Y priklausomybė aprašyta 12.5 skyrelio (4) lentele, tai (1) regresijos tiesės koeficientai randami iš sistemos

$$\boxed{\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \overline{Y}_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} m_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{Y}_i. \end{cases}} \tag{6}$$

Panašiai galime ieškoti ir regresijos lygties

$$\overline{X}_y = cy + d$$

koeficientų c ir d.

Koeficientas a vadinamas *Y regresijos koeficientu X atžvilgiu*, o koeficientas c — *X regresijos koeficientu Y atžvilgiu*. Didėjant a, Y priklausomybė nuo X didėja. Kai $a = 0$, Y nepriklauso nuo X kitimo. Šiuo atveju sakysime, kad *Y nekoreliuotas su X*.

Pavyzdžiai. 1. Bandomasis žemės sklypas padalytas į 9 lygiaplotes dalis. Derlingumo Y (kg) priklausomybė kiekvienoje dalyje nuo trąšų kiekio X (g) pavaizduota lentelėje

x_i	40	50	100	140	180	210	240	270	300
y_i	4	8	14	20	23	26	30	36	37

Rasime regresijos Y atžvilgiu X tiesės lygtį.

Norėdami apskaičiuoti sumas, įeinančias į (5) sistemą, sudarome papildomą lentelę:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
40	4	1600	160
50	8	2500	400
100	14	10000	1400
140	20	19600	2800
180	23	32400	4140
210	26	44100	5460
240	30	57600	7200
270	36	72900	9720
300	37	90000	11100
1530	198	330700	42380
Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$

Į (5) sistemą įrašę rastąsias sumas, gauname

$$\begin{cases} 330700a + 1530b = 42380, \\ 1530a + 9b = 198. \end{cases}$$

Iš čia $a = 0{,}1235 \approx 0{,}12$, $b = 1{,}005 \approx 1{,}00$.

Taigi regresijos tiesės lygtis yra $\overline{Y}_x = 0{,}12x + 1{,}00$. Iš šios lygties galime sužinoti, kokio derlingumo galima laukti patręšus 500 g trąšų:

$$\overline{Y}_x = 0{,}12 \cdot 500 + 1{,}00 = 61 \text{ kg}.$$

2. Remdamiesi 12.5 skyrelio (3) lentele, rasime atsitiktinio dydžio Y priklausomybės nuo atsitiktinio dydžio X regresijos tiesės lygtį.

Iš 12.5 skyrelio (3) lentelės randame $\overline{Y}_i$ sąlyginius vidurkius ir sudarome naują lentelę:

x_i	$\overline{Y}_i$	m_i	$m_i x_i$	$m_i x_i^2$	$m_i \overline{Y}_i$	$m_i x_i \overline{Y}_i$
2	0,1	1	2	4	0,1	0,2
3	0,2	3	9	27	0,6	1,8
4	0,26	5	20	80	1,3	5,2
5	0,41	7	35	175	2,87	14,35
6	0,49	8	48	288	3,92	23,52
7	0,59	7	49	343	4,13	28,91
8	0,66	5	40	320	3,3	26,4
9	0,8	3	27	243	2,4	21,6
10	1	1	10	100	1	10
—	—	$\Sigma m_i = 40$	$\Sigma m_i x_i = 240$	$\Sigma m_i x_i^2 = 1580$	$\Sigma m_i \overline{Y}_i = 19{,}62$	$\Sigma m_i x_i \overline{Y}_i = 131{,}98$

Į (6) lygčių sistemą įrašę rastąsias sumų reikšmes, gauname

$$\begin{cases} 1580a + 240b = 131{,}98, \\ 240a + 40b = 19{,}62. \end{cases}$$

Iš čia $a = 0{,}10$, $b = -0{,}11$.

Taigi regresijos tiesės lygtis yra $\overline{Y}_x = 0{,}1x - 0{,}11$.

12.7. Pratimai

1. Raskite imties: plotį, variacinę seką, variacinę lentelę ir statistinį skirstinį, kai imtis yra:

a) 5, 7, 10, 3, 5, 2, 5, 10, 7, 7, 2, 7, 4, 2, 4;

b) 11, 15, 12, 0, 16, 9, 6, 11, 12, 13, 16, 8, 19, 14, 5, 11, 3;

c) 7, 3, 4, 9, 11, 3, 7, 12, 5, 4, 3, 12, 4, 5, 7.

2. Raskite statistinį skirstinį imties, duotos variacine lentele:

a)

x_i	3	4	5
n_i	7	9	4

b)

x_i	2	5	6	7
n_i	10	8	20	14

c)

x_i	2	4	6	8
n_i	10	15	5	20

d)

x_i	2	5	8	10
n_i	5	15	10	20

Nubraižykite imties dažnių ir santykinių dažnių daugiakampius.

3. Nubraižykite histogramą, kai duota intervalinė variacinė lentelė:

a)

$[a_i, a_{i+1})$	[2, 7)	[7, 12)	[12, 17)	[17, 22)	[22, 27]
n_i	5	10	25	6	4

;

b)

$[a_i, a_{i+1})$	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6]
n_i	20	30	40

.

4. Imtis aprašyta lentele:

a)

x_i	17	18	19	20	21	22	23
n_i	7	7	3	1	3	2	2

;

b)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	1	3	1	1	1	1

;

c)

x_i	1	2	3	4	5	9
n_i	1	1	1	1	2	1

;

d)

x_i	1	2	3	4	5	12
n_i	1	1	1	1	2	1

.

Raskite imties plotį, modą, medianą, vidurkį, dispersiją, kvadratinį nuokrypį ir variacijos koeficientą.

5. Apskaičiuokite imties dispersiją ir pataisytą empirinę dispersiją, kai imtis yra:

a)

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	4	15	3	5	5	3	2	2	1

;

b)

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

; c)

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

;

d)

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

.

6. Imtis aprašyta intervaline variacine lentele:

a)

[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13]
1	2	4	2	1	1

;

b)

[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16)	[16, 20)	[20, 24]
1	1	3	2	1	1

;

c)

[5, 7)	[7, 9)	[9, 11)	[11, 13)	[13, 15)	[15, 17]
8	14	40	26	6	4

.

Raskite modą, medianą, vidurkį ir dispersiją.

7. Duotos šios imtys:

a) 19, 21, 8, 20, 23, 18, 22, 20, 17, 12, 20, 11, 9, 12, 20, 9, 19, 17, 21, 13, 17, 22, 22, 10, 20, 20, 15, 19, 20, 20, 13, 21, 21, 9, 14, 11, 19, 18, 23, 19 ($n=40$, $h=2$);

b) 69, 73, 70, 68, 61, 73, 70, 72, 67, 70, 66, 70, 76, 68, 71, 71, 68, 70, 64, 65, 72, 70, 70, 69, 66, 70, 77, 69, 71, 74,. 60, 75, 76, 69, 71, 67, 70, 73, 71, 74 ($n=40$, $h=3$);

c) 8,5, 7,1, 6,7, 6,2, 2,9, 4,4, 6,0, 5,8, 5,4, 8,2, 6,9, 6,5, 6,1, 3,8, 6,0, 5,6, 6,0, 5,3, 7,7, 6,8, 6,5, 6,1, 4,2, 4,7, 5,6, 5,4, 5,3, 7,4, 6,7, 6,4, 6,1, 4,5, 6,0, 5,8, 5,6, 5,1 ($n=36$, $h=1$).

Sudarykite nurodyto žingsnio intervalinę variacinę lentelę, apskaičiuokite vidurkį, dispersiją ir pataisytą empirinę dispersiją.

8. Kviečių derlingumas sklypuose nurodytas lentelėje

Derlingumas cnt/ha	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20	20—22	22—24
Lauko plotas ha	5	12	20	34	45	32	22

Apskaičiuokite derlingumo vidurkį, dispersiją, kvadratinį nuokrypį ir variacijos koeficientą.

9. Iš generalinės aibės paimta tūrio n imtis, kurioje stebimasis požymis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Su tikimybe γ raskite nežinomo parametro $a = M(X)$ pasikliautinąjį intervalą, kai:

1) $\bar{X}_I = 10$, $n = 25$, $\sigma = 0,1$ $\gamma = 0,99$,
2) $\bar{X}_I = 12$, $n = 49$, $\sigma = 1,5$ $\gamma = 0,95$,
3) $\bar{X}_I = 12$, $n = 49$, $\sigma = 1,5$ $\gamma = 0,99$,
4) $\bar{X}_I = 12$, $n = 49$, $\sigma = 1,5$ $\gamma = 0,995$.
5) $\bar{X}_I = 20,1$, $n = 36$, $\sigma = 6$, $\gamma = 0,95$,
6) $\bar{X}_I = 20,1$, $n = 64$, $\sigma = 6$, $\gamma = 0,95$,
7) $\bar{X}_I = 20,1$, $n = 144$, $\sigma = 6$, $\gamma = 0,95$.

Kokias išvadas galima padaryti 2—4 ir 5—7 atvejais?

10. Iš generalinės aibės paimta tūrio n imtis, kurioje stebimasis požymis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Su tikimybe γ raskite nežinomo parametro $a = M(X)$ pasikliautinąjį intervalą, kai:

1) $\bar{X}_I = 2$, $n = 10$, $s = 2,4$, $\gamma = 0,95$,
2) $\bar{X}_I = 30,1$, $n = 9$, $s = 6$, $\gamma = 0,99$,
3) $\bar{X}_I = 0,5$, $n = 25$, $s = 0,05$, $\gamma = 0,99$,
4) $\bar{X}_I = 0,5$, $n = 50$, $s = 0,05$, $\gamma = 0,99$,
5) $\bar{X}_I = 12,7$, $n = 25$, $s = 0,5$, $\gamma = 0,95$.

11. Generalinėje aibėje stebimasis požymis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Koks turi būti imties minimalus tūris, kad su pasikliovimo tikimybe γ imties požymio vidurkis nuo generalinės aibės matematinės vilties skirtųsi ne daugiau kaip ε, kai:

1) $\sigma = 1,2$, $\gamma = 0,975$, $\varepsilon = 0,3$,
2) $\sigma = 1,5$, $\gamma = 0,925$, $\varepsilon = 0,2$,
3) $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0,95$, $\varepsilon = 0,25$,
4) $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0,99$, $\varepsilon = 0,25$,
5) $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0,999$, $\varepsilon = 0,25$,
6) $\sigma = 5,92$, $\gamma = 0,999$, $\varepsilon = 0,5$.

12. Generalinėje aibėje stebimasis požymis pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Sudaryta tūrio n imtis ir rastas jos požymio empirinis kvadratinis nuokrypis s. Raskite generalinės aibės požymio kvadratinio nuokrypio pasikliautinąjį intervalą su pasikliovimo tikimybe γ, kai:

1) $n = 25$, $s = 0,3$, $\gamma = 0,95$,
2) $n = 50$, $s = 0,5$, $\gamma = 0,999$,
3) $n = 70$, $s = 0,4$, $\gamma = 0,99$,
4) $n = 10$, $s = 5,1$, $\gamma = 0,999$,
5) $n = 50$, $s = 14$, $\gamma = 0,999$.

13. Siekiant nustatyti įvykio A tikimybę, atlikta n bandymų, kuriuose įvykis A pasirodė S_n kartų. Su pasikliovimo tikimybe γ raskite įvykio A tikimybės pasikliautinąjį intervalą:

1) $n = 500$, $S_n = 480$, $\gamma = 0,95$,
2) $n = 100$, $S_n = 75$, $\gamma = 0,99$,
3) $n = 100$, $S_n = 40$, $\gamma = 0,95$.

14. Atsitiktinių dydžių X ir Y priklausomybė aprašyta lentele:

a)

x_i	8	10	5	8	9
y_i	1	3	1	2	3

; b)

x_i	9	10	12	5
y_i	6	4	7	3

;

c)

x_i	10	2	7	5
y_i	8	2	6	4

.

Raskite Y priklausomybės nuo X ir X priklausomybės nuo Y regresijos tiesių lygtis.

15. Moksleivių 30 ir 100 m bėgimo rezultatai (sekundėmis) pateikti lentelėje.

x_i(30 m)	4,6	4,6	4,7	4,8	4,8	4,9	4,9	4,9	5,0
y_i(100 m)	12,4	12,7	13,0	13,3	13,1	13,2	13,5	13,6	13,7

Raskite moksleivių 100 m bėgimo rezultatų priklausomybę nuo jų 30 m bėgimo rezultatų. Per kiek laiko, galima tikėtis, nubėgs moksleivis 100 m, jei 30 m jis nubėgo per 5,2 s?

16. Atsitiktinių dydžių X ir Y statistinė priklausomybė aprašyta koreliacine lentele:

Y \ X	1	2	3	4	5	n_y
14	10	8	—	—	—	18
15	—	12	7	—	—	19
16	—	—	28	6	—	34
17	—	—	—	8	9	17
18	—	—	—	—	12	12
n_x	10	20	35	14	21	100

Y \ X	10	12	14	16	18	20	n_y
10	9	4	1	—	—	—	14
30	1	10	9	3	—	—	23
50	—	2	6	14	6	—	28
70	—	—	1	10	18	6	35
n_x	10	16	17	27	24	6	100

Raskite Y priklausomybės nuo X regresijos tiesės lygtį.

12.8. Atsakymai

1. a) $R=8$; 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10;

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

b) $R=19$; 0, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 19;

x_i	0	3	5	6	8	9	11	12	13	14	15	16	19
n_i	1	1	1	1	1	1	3	2	1	1	1	2	1
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{17}$

c) $R=9$; 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 11, 12, 12;

x_i	3	4	5	7	9	11	12
n_i	3	3	2	3	1	1	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

2. a)

x_i	3	4	5
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$

b)

x_i	2	5	6	7
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{26}$

c)

x_i	2	4	6	8
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

d)

x_i	2	5	8	10
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

4. a) $R=6$; imtis nemodali; $Me=18$, $\overline{X}_l=19$, $D_l=3{,}92$, $\sigma_l=1{,}98$, $V=10{,}4\%$; b) $Mo=Me=3$, $\overline{X}_l=3{,}5$, $D_l=3{,}65$, $\sigma_l=1{,}91$, $V=54{,}57\%$; c) $Mo=5$, $Me=4$, $D_l=5{,}84$, $\overline{X}_l=4{,}14$, $\sigma_l=2{,}42$, $V=58{,}45\%$; d) $Mo=5$, $Me=4$, $\overline{X}_l=4{,}57$, $D_l=$ $=11{,}10$ $\sigma_l=3{,}33$, $V=72{,}87\%$. **5.** a) $D_l=4{,}63$, $s^2=4{,}75$; b) $D_l=167{,}29$, $s^2=168{,}98$; c) $D_l=6{,}24$, $s^2=6{,}93$; d) $D_l=8{,}04$, $s^2=8{,}93$. **6.** a) $Mo=Me=6$. $\overline{X}_l=6{,}54$, $D_l=7{,}34$; b) $Mo=Me=10$, $\overline{X}_l=11{,}78$, $D_l=32{,}39$; c) $Mo=Me=$ $=10$, $\overline{X}_l=10{,}41$, $D_l=5{,}22$. **7.** a) $\overline{X}_l=17{,}55$, $D_l=20{,}60$, $s^2=21{,}13$; b) $\overline{X}_l=$ $=70{,}4$, $D_l=12{,}6$, $s^2=12{,}9$; c) $\overline{X}_l=6{,}00$, $D_l=1{,}47$, $s^2=1{,}51$. **8.** $\overline{X}_l=18{,}36$, $D_l=9{,}53$, $\sigma_l=3{,}09$, $V=16{,}83\%$. **9.** 1) (9,95, 10,05); 2) (11,58, 12,42); 3) (11,45, 12,55); 4) (11,40, 12,60); 5) (18,14, 22,06); 6) (18,63, 21,57); 7) (19,12, 21,08). Didėjant pasikliovimo tikimybei, didėja ir pasikliovimo intervalas. Didėjant imties tūriui, mažėja pasikliautinasis intervalas. **10.** 1) (0,3, 3,7); 2) (23,38, 36,82); 3) (0,47, 0,53); 4) (0,48, 0,52); 5) (12,5, 12,9). **11.** 1) 81; 2) 179; 3) 16; 4) 27; 5) 44; 6) 1527. **12.** 1) (0,2, 0,4); 2) (0,3, 0,7); 3) (0,3, 0,5); 4) (0, 14,3); 5) (7,98, 20,02). **13.** 1) (0,94, 0,98); 2) (0,64, 0,86); 3) (0,3; 0,5). **14.** a) $\overline{Y}_x=0{,}43x-1{,}43$, $\overline{X}_y=1{,}5y+5$; b) $\overline{Y}_x=0{,}5x+0{,}5$, $\overline{X}_y=$ $=1{,}3y+2{,}5$; c) $\overline{Y}_x=0{,}76x+0{,}44$, $\overline{X}_y=1{,}3y-0{,}5$. **15.** $\overline{Y}_x=3{,}0x-1{,}2$; 14,4 sek. **16.** a) $\overline{Y}_x=0{,}93x+12{,}93$; b) $\overline{Y}_x=6{,}29x-48{,}43$.

PRIEDAS

1 *lentelė*. Funkcijos $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ reikšmės

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2 *lentelė.* Funkcijos $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ reikšmės

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00339	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18032	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	0,499968	4,5	499997	5,0	0,49999997				

3 *lentelė*. Puasono funkcijos $P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ reikšmės

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5	0,000000	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000003

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8	0,000001	0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008102
9	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000191	0,002701
10	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000038	0,000810
11	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000007	0,000221
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000055
13	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000013
14	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003
15	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112600
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099662	0,118580	0,125110
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113740
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000000	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	0,000000	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	0,000000	0,000000	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	0,000000	0,000000	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000016	0,000073
25	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000006	0,000029
26	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002	0,000011
27	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004
28	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

4 *lentelė*. Funkcijos $\alpha = \alpha(n, \gamma)$ reikšmės

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	19	2,10	2,88	3,92
6	2,57	4,03	6,86	20	2,09	2,86	3,88
7	2,45	3,71	5,96	25	2,06	2,80	3,74
8	2,37	3,50	5,41	30	2,04	2,76	3,66
9	2,31	3,36	5,04	35	2,03	2,73	3,60
10	2,26	3,25	4,78	40	2,02	2,71	3,56
11	2,23	3,17	4,59	45	2,02	2,69	3,53
12	2,20	3,11	4,44	50	2,01	2,68	3,50
13	2,18	3,06	4,32	60	2,00	2,66	3,46
14	2,16	3,01	4,22	70	1,99	2,65	3,49
15	2,15	2,98	4,14	80	1,99	2,64	3,42
16	2,13	2,95	4,07	90	1,98	2,63	3,40
17	2,12	2,92	4,02	100	1,98	2,63	3,39
18	2,11	2,90	3,97	120	1,98	2,62	3,37
				∞	1,96	2,57	3,29

5 *lentelė*. Funkcijos $\beta = \beta(n, \gamma)$ reikšmės

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	19	0,39	0,60	0,92
6	1,09	2,01	3,88	20	0,37	0,58	0,88
7	0,92	1,62	2,98	25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	1,38	2,42	30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	1,20	2,06	35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	1,08	1,80	40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	1,60	45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	1,45	50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	1,33	60	0,19	0,27	0,38
14	0,48	0,78	1,23	70	0,17	0,24	0,34
15	0,46	0,73	1,15	80	0,16	0,23	0,31
16	0,44	0,70	1,07	90	0,15	0,21	0,29
17	0,42	0,66	1,01	100	0,14	0,20	0,27
18	0,40	0,63	0,96	150	0,12	0,16	0,22
				200	0,10	0,14	0,19
				250	0,09	0,12	0,16

LITERATŪRA

1. **Matematika** technikumams. V., Mokslas, 1979.

2. **Liutikas V.** Kaip skaičiuoti įvykių tikimybes. K., Šviesa, 1972.

3. **Gasas S.** Kelionė į tiesinio programavimo šalį. V., Mokslas, 1977.

4. **Rumšas P.** Trumpas aukštosios matematikos kursas. V., Mokslas, 1976.

5. **Švarcburdas S., Ivašovas-Musatovas O.** Algebra ir analizės pradmenys. V., Mokslas, 1984.

6. **Purcell E. J.** Calculus with analytic geometry. New York, 1965.

7. **Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Гудкин И. И.** и др. Зборник задач по математике для техникумов. М., Наука, 1987.

8. **Валуце И. И., Дилигул Г. О.** Математика для техникумов. М., Наука, 1989.

9. **Виленкин И. Я., Потапов В. Г.** Задачник практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М., Просвещение, 1979.

10. **Зайцев И. Я.** Высшая математика. М., Высшая школа, 1991.

11. **Подольский В. А., Суходский А. М.** Зборник задач по математике. М., Высшая школа, 1978.

12. **Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.** Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1989.

13. **Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дм.** Вероятность. М., Мир, 1969.

14. **Ивашев-Мусатов О. С.** Теория вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1991.

TURINYS